a cura di Francesco Romani

La Potenza del Segnale

La seconda puntata della serie "Suoni e Segnali" è dedicata allo studio della potenza di un segnale. Viene introdotta (con molta cautela) la trasformata di Fourier e viene presentato lo studio con *Mathematica* dello spettro di potenza di un segnale.

Potenza ed energia di segnali continui e sinusoidali

Iniziamo con un po' di elettrotecnica elementare: immaginiamo di avere una stufetta elettrica e di alimentarla con una tensione costante di **V Volt**. Se la stufetta ha una resistenza di **R Ohm** vi scorre una corrente **A = V/R Ampère** e viene dissipata una potenza **W = V. A = V^2/R. Watt**. Se la stufa resta attaccata per **t ore** alla fine contribuirà alla bolletta per **W/1000 Kilowattore** di energia consumata.

Se invece di una tensione su una stufa si ha un segnale **f(t)** che varia in funzione del tempo, la sua potenza istantanea è proporzionale a **$f(t)^2$**. Considerando un intervallo di tempo **T** l'**Energia** è proporzionale all'integrale del quadrato del segnale e la **Potenza media** al rapporto tra l'energia e il tempo trascorso.

In[1]:=
```
Energia := Integrate[f[t]^2,{t,0,T}]
```

In[2]:=
```
PotenzaMedia :=
    Integrate[f[t]^2,{t,0,T}]/T
```

Se il segnale è periodico, la potenza media dopo un tempo molto lungo è pari alla potenza media su un periodo e quindi il segnale si comporta ai fini dell'energia come un segnale costante di valore pari alla radice quadrata della potenza media.

Facciamo il caso di un segnale sinusoidale di periodo **T** e valore massimo **Vpicco**.

In[3]:=
```
f[t] := Vpicco Cos[2 Pi/T t]
PotenzaMedia
```

Out[3]=
```
Vpicco2
-------
   2
```

Per questa ragione quando si misura la tensione di una corrente alternata si preferisce dare il valore efficace **Veff** pari a **Vpicco/Sqrt[2]**. Per esempio una comune presa di corrente domestica fornisce un segnale sinusoidale a **50 Hz** e **220 Veff**.

L'espressione del segnale è

In[3]:=
```
f[t] := 220 Sqrt[2] Cos [2 Pi/50 t]
```

e la potenza dissipata su una resistenza di **R Ohm** è la stessa che si avrebbe usando una batteria a **220 V**.

La situazione si complica molto se il segnale non è sinusoidale ma ha una forma qualsiasi. Le strade per calcolare l'energia e la potenza sono essenzialmente due:

i) trovare la funzione che definisce il segnale e calcolarne la media integrale del quadrato (su un periodo o su un tempo molto lungo):

In[3]:=
```
PWR[f_,T_] := NIntegrate[f[t]^2,{t,0,T}]/T
```

ii) vedere il segnale come la somma di un numero finito o infinito di segnali sinusoidali (di cui sappiamo calcolare potenza ed energia) e sommare i vari contributi.

Questo secondo approccio costituisce l'idea di base di una importante branca della matematica detta **Analisi di Fourier**.

Nel seguito ne accenniamo le principali applicazioni senza entrare nei dettagli (che richiederebbero molte pagine di formule).

Le trasformate di Fourier

Una prima distinzione da fare per poter procedere oltre è quella tra segnali a potenza infinita (che non hanno una realizzabilità fisica e non ci interessano) e segnali a potenza finita. Tra questi ultimi inoltre distinguiamo tra:

1) segnali periodici: un qualunque suono musicale (una nota oppure un accordo) ripetuto senza interruzione; la corrente elettrica per usi domestici; una portante radio non modulata; i segnali gravitazionali ed elettromagnetici emessi da una Pulsar.

2) segnali non periodici di durata infinita: una funzione definita in $(-\infty,+\infty)$, musica sempre diversa, i segnali trasmessi da un modem, una trasmissione radio. Quest'ultima categoria di segnali fornisce un modello ai segnali che portano una informazione, ovviamente in pratica se ne può trattare solo una porzione di durata finita.

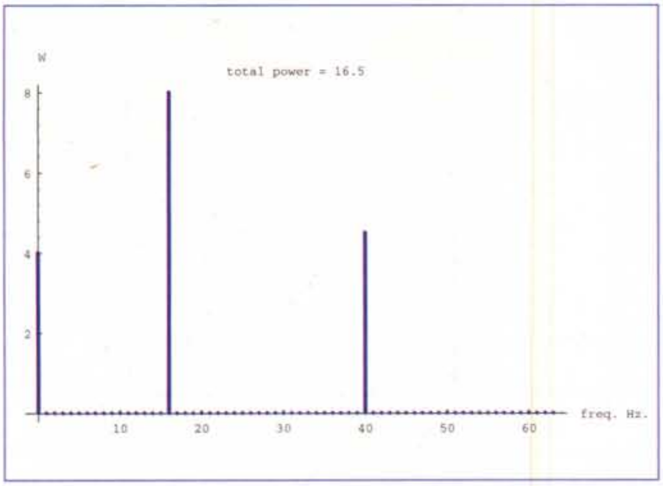

Figura 1

Nel caso **1)** il contributo delle varie frequenze si può calcolare attraverso la **Serie di Fourier**. Esistono formule che permettono di esprimere la funzione periodica come la somma di una frequenza sinusoidale fondamentale e delle sue armoniche. In alcuni casi particolari le armoniche sono in numero finito, ma in generale le armoniche sono infinite. La trasformazione è reversibile e non distruttiva (ovvero data la funzione si trovano le ampiezze delle armoniche, date le armoniche si ritrova la funzione)

Nel caso **2)** il contributo delle varie frequenze si può calcolare attraverso l'**Integrale di Fourier**. In questo caso le frequenze in cui viene scomposto il segnale sono tutte quelle possibili e non solo i multipli della fondamentale. La serie viene sostituita da un integrale e la sequenza delle ampiezze delle armoniche diviene una funzione detta **Trasformata Continua di Fourier** (anche in questo caso la trasformazione è reversibile)

Un approccio pratico (meno preciso ma più semplice) consiste nel prendere solo un pezzo del segnale (un secondo, un'ora, dieci anni) campionarlo in un numero finito di punti e trattarlo come fosse un pezzo di un segnale periodico. Esiste infatti un' altra trasformazione detta **Trasformata Discreta di Fourier** (nel seguito **DFT**) che opera su vettori di lunghezza finita producendo vettori di lunghezza finita e può essere usata per approssimare numericamente sia le serie che gli integrali di Fourier. La DFT di un vettore **X** di **n** valori complessi $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ è un vettore **Y** di **n** valori complessi definito come:

$$y_k = \sum_{h=0}^{n-1} x_h \, e^{\frac{2\pi i}{n} hk}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

che sembrerebbe richiedere n^2 operazioni. Esiste un algoritmo veloce per il calcolo della DFT, detto **Fast Fourier Transform** (**FFT** nel seguito), che richiede invece un numero di operazioni proporzionale a **n log n** (per **n = 1.000.000** questo significa un risparmio di tempo di un fattore **50.000**). Non è azzardato affermare che per le sue molteplici applicazioni (tanto per citarne qualcuna: tomografia assiale computerizzata, risoluzione di equazioni alle derivate parziali, tecniche di riconoscimento radar, trattamento di segnali digitali in tempo reale) l'algoritmo FFT rappresenta uno dei più importanti risultati intellettuali di questo secolo.

Mathematica offre il comando **`Fourier`** che implementa la FFT in modo abbastanza efficiente (anche se per applicazioni intensive conviene lavorare a basso livello).

In[1]:=
```
?Fourier
```

Out[1]=
```
Fourier[list] finds the discrete Fourier tran-
sform of a list of complex numbers.
```

L'algoritmo per approssimare lo spettro di potenza di un segnale periodico a valori reali può venire strutturato come segue:

1) il segnale **f(x)** viene campionato (valutato) in un intervallo di tempo **(0,T]** con una frequenza di campionamento **r** (ovvero i campioni distano tra loro **1/r secondi**). Conviene scegliere i parametri in modo da avere un numero pari **n** di campioni;

2) viene calcolata la DFT del vettore dei campioni e si conservano le prime **n/2** componenti (che sono numeri complessi). Di questi se ne calcola il modulo al quadrato e si moltiplicano i risultati per **2/n**.

Gli **n/2** numeri reali ottenuti rappresentano una approssimazione dello spettro di potenza del segnale di partenza, in particolare:

- la **prima** componente costituisce una approssimazione del doppio della potenza della componente continua (la media) del segnale;
- la **i-esima** componente costituisce una approssimazione della potenza della componente di frequenza **i/T Hz** del segnale.

Quindi la nostra approssimazione permette di approssimare le potenze del segnale nell'intervallo **(0,n/2T) = (0,r/2)** con una risoluzione **1/T**.

Il fatto che dopo un campionamento a frequenza **r** l'intervallo analizzabile sia **(0,r/2)** non è casuale ma è in perfetto accordo con il Teorema del Campionamento che assicura la possibilità (teorica) di ricostruire esattamente una funzione limitata in frequenza nell'intervallo **(0,fl)** con un campionamento di frequenza almeno $2f_l$.

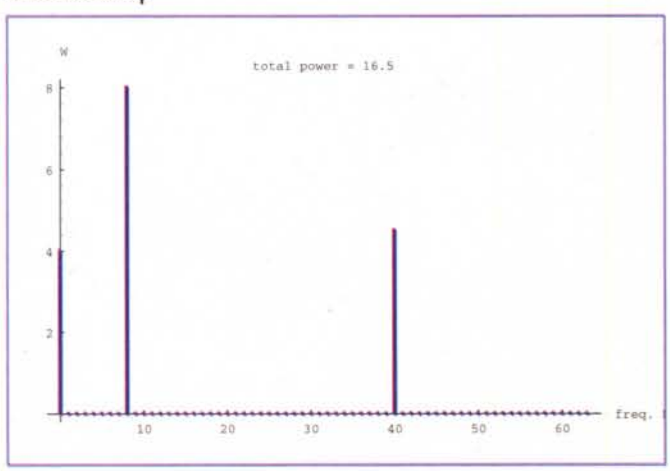

Figura 2

Esempi di uso del programma PWS

Il programma completo che effettua l'analisi è piuttosto lungo e lo posso inviare a chi ne farà richiesta (e-mail: romani@di.unipi.it).

La funzione è **PWS[f,T,r]** e calcola lo spettro di potenza della funzione **f** campionata con frequenza **r** in **(0,T]**.

Usiamo lo spazio che rimane per fare alcuni esempi delle varie situazioni che si possono presentare:

1) funzione periodica limitata in banda con frequenza massima **<r/2** e con periodo sottomultiplo esatto di **T**.

Prendiamo come esempio una funzione che ha una componente costante di valore **2 V** più una componente a frequenza **16 Hz** di ampiezza **4 V** ed una componente a frequenza **40 Hz** di ampiezza **3 V.** La potenza è **4+16/2+9/2 = 16.5 W.** Campioniamo per un secondo con frequenza **128 Hz** (ovvero il range di frequenze utili va fino a **64 Hz** con risoluzione **1 Hz**). Si nota che la potenza calcolata con l'integrale e la potenza calcolata con la trasformata di Fourier coincidono e lo spettro di potenza è quello voluto.

In[1]:=
```
f[x_]:=2+4 Sin[16 2Pi x]+3 Cos[40 2Pi x];
PWS[f,1.,128];
PWR[f,1.]
```

Out[1]=
```
16.5
```

Vedi Figura 1

2) funzione periodica limitata in banda con frequenza massima **>r/2** e con periodo sottomultiplo esatto di **T**.

Effettuiamo un piccola modifica portando a **120 Hz** la frequenza della seconda componente. La potenza calcolata con la trasformata di Fourier è ancora corretta ma la componente a **120 Hz** si è spostata e il grafico segna **8 Hz**. Questo dannoso fenomeno è detto aliasing (ovvero comparsa di frequenze fantasma, è lo stesso fenomeno che sembra far girare nel senso sbagliato le ruote dei carri nei film Western).

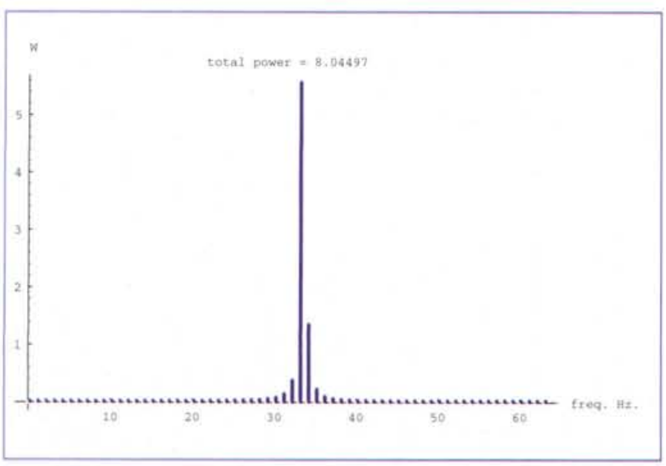

Figura 4

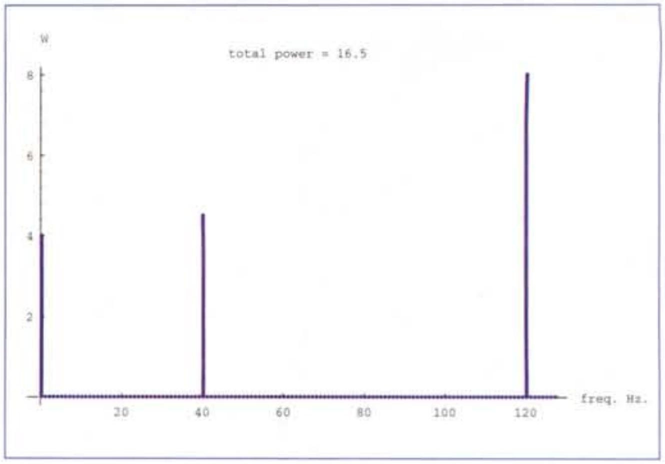

Figura 3

In[2]:=
```
f[x_]:=2+ 4 Sin[120 2Pi x]+3 Cos[40 2Pi x];
PWS[f,1.,128];
PWR[f,1.]
```

Out[2]=
```
16.5
```

Vedi Figura 2

Se si raddoppia la frequenza di campionamento va tutto a posto.

In[3]:=
```
f[x_]:=2+4 Sin[120 2Pi x]+3 Cos[40 2Pi x];
PWS[f,1.,256];
```

Vedi Figura 3

3) funzione periodica con periodo che non è sottomultiplo esatto di **T**.

Prendiamo come esempio una funzione a frequenza **33.33... Hz** di ampiezza **4 V**. La potenza è **8 W**. Si nota che la potenza calcolata è corretta solo se si integra su un multiplo del periodo; lo spettro di potenza mostra fastidiose righe di dispersione (**leakage**), la cui spiegazione matematica è molto elegante ma richiede strumenti (la convoluzione integrale) di cui ora non disponiamo.

In[4]:=
```
f[x_]:=4 Sin[100/3 2 Pi x] ;
PWS[f,1.,128];
PWR[f,1.]
PWR[f,3.]
```

Out[4]=
```
8.01654
8.
```

Vedi Figura 4

Bibliografia

Brigham, **The fast Fourier transform**, Prenctice Hall (1984).

Bini, Capovani, Lotti e Romani, **Complessità Numerica**, Capitolo 4, Boringhieri (1981)

Prodotti di Alta Qualità e Convenienza nei Prezzi

EGiS COMPUTER

Finanziaria 10 / 10
10% anticipo + 10 comode rate

Sito WEB
Prossima Apertura !

Vendita al minuto e per corrispondenza
I Nostri Prezzi saranno il **Tuo Grande Affare**
Forniture per Rivenditori

E-Mail
egis.computer@linet.it

Vendita
Montaggio
Assistenza

Macchine e Apparati informatici singoli o in rete per enti, aziende ed uffici

MOTHERBOARD e CPU

MB Pentium Tx *Pro* + Audio + VGA	119
MB Pent. 100MHz SiS/Via AGP Audio	139
MB Asus P5A 100MHz	179
MB per Pentium II 66MHz + Audio	138
MB per Pentium II 100MHz + Audio	162
MB Asus P2B 440BX Bus 100 MHz	276
MB Asus P2B 440BX + SCSI UW III	499
MB Asus P2B Dual CPU + UW III	770
WinChip 200/225 upgrade MMX da	98
Cyrix M2 233	129
AMD K6 II 266 3D	178
AMD K6 II 300 3D	213
AMD K6 II 333 3D	276
AMD K6 II 350 3D	384
Pentium II 300	390
Pentium II 333	440
Pentium II 350	568
Pentium II 400	890
Pentium II 450	1.362

MEMORIA RAM

SIMM 32 Mbyte EDO	65
DIMM 32 Mbyte	59
DIMM 64 Mbyte	132
DIMM 64 Mbyte 100MHz	149
DIMM 128 Mbyte 100MHz	269

MEMORIE DI MASSA

3.2 Gbyte EIDE Ultra	229
4.3 Gbyte EIDE Ultra	249
6.3 Gbyte EIDE Ultra	306
8.2 Gbyte EIDE Ultra	411
10 Gbyte EIDE Ultra	468
4.3 Gbyte SCSI Ultra Wide II	475
9.0 Gbyte SCSI Ultra Wide III	997
CD ROM 32x Goldstar	102
CD ROM 36x	89
CD ROM 40x *Asus*	129
CD ROM SCSI 32x *Plextor*	215
I/O Mega ZIP interno	179
LS 120 Mbyte	178

NOTEBOOK

Tutti con Monitor a Colori

Acer 355	P150/16/1.6G	1.680
Acer 390 c	P166/16/2G CD 14x	2.121
Tosh.4000 CDS	PII233/32/4G 20x	2.788
Tosh.4000 CDT	PII233/32/4G 20x	*Tel.*
Tosh.8000 CDT	PII266/64/6G 13.3"	7.990

NoteBook di tutte le marche
Accessori , cavi , periferiche esterne

Tutto per lo standard PCMCIA

MACCHINE COMPLETE

Piastra Tx / Lx 512Kcache
32 Mbyte RAM
Hard Disk 3.2 Gbyte
SVGA 16Mcol. 4Mb
Sch. Audio 16bit 3D PnP
Floppy Drive 1.44 Mbyte
Cabinet MidiTower
Tastiera W95 + Mouse
CD-ROM Easy*Start* 1.0
con i più famosi ed utili programmi shareware con commento in italiano

Pago BANCOMAT

il tutto con basato su :

WinChip 200	659
M2 233	685
K6 II 266 3D	810
K6 II 300 3D	835
K6 II 333 3D	885
K6 II 350 3D	985
Pentium II 300	1.058
Pentium II 333	1.099
Pentium II 350	1.249
Pentium II 400	1.870
Pentium II 450	2.072

UGPGRADE SISTEMI

Entra nel nuovo e veloce mondo AGP
Sostituzione e valutazione dell'usato !

Ottimizzazione e risoluzione per i conflitti di qualunque sistema !

STAMPANTI

HP Deskjet 690c	278
HP Deskjet 710c	392
HP Laserjet 6L	628
Epson Stylus Color 440	271
Epson Stylus Color 640	394
Epson Stylus Photo 700	476
Epson Stylus Photo 740	540
Canon Bubblejet 250	189
Canon Bubblejet 4300	282

Disponibili tutte le marche...

INTERNET

Abbonamento
Internet + E-Mail
Annuale / Full-Time
a sole **150**

SCHEDE VIDEO

SVGA True Color PCI 2Mb da	26
S3 3D Virge 4Mb PCI	48
Voodoo 3DFx 4 Mbyte	123
Voodoo2 3DFx 12 Mbyte	319
ATI Work All-in-One AGP	328
Diamond Viper 330 PCI /AGP	177
Matrox G100 Productiva 4Mb	107
Matrox G100 Productiva 8Mb	126
Matrox G200 Mystique 8Mb	259
Matrox G200 Millenium 8Mb	259
Miro PC-TV	230
Miro DC10 In/Out VHS/YC	480

Componenti Hardware per la cattura ed il montaggio video

MONITOR

Color 15" L.Rad. N.I. Digitale	249
Goldstar 55i 15" Digitale	358
Goldstar 55M 15" Digitale	399
AOC 17" Digitale N.I.	487
Sony 100 ES - 15" 0.25 1024	499
Sony 100 GS - 15" 0.25 1280	615
Sony 200 ES - 17" 0.25 1280	831
Sony 200 GS - 17" 0.25 1600	1.015
Sony 200 PS - 17" 0.25 1600	1.221
Sony 400 PS - 19" Digitale	1.837

ACCESSORI

Scheda Sound 16 bit 3D PnP	25
SoundBlaster 16 *Vibra*	48
SoundBlaster AWE 64 PnP	72
Schede di Rete PCI PnP da	39
Scanner 300x600 dpi 30 bit	119
Scanner Mustek 600x1200 dpi	163
Telecamera Videoconferenza	249
ModemFax 33600 DSVD int.	71
ModemFax 56000 DSVD est.	154
ModemFax Digicom *Tiziano*	219
US Robotics ISDN T.A. int.	133
US Robotics *Message Plus*	289
Adaptec 2940 Ultra Wide	357
Contr. SCSI Ultra Symbios	94
Cabinet Desk o MiniTower	54
Cabinet Medio-Tower ATX	79
Tastiera W95 Italiana	19
Mouse Seriale	9
Disk Drive 1.44 Mbyte	29
CDROM verg. Pezzo Singolo	£ 1950
Casse Amplificate 70 Watt	24
Casse Amplificate 160 Watt	54
Casse Satelliti + SubWoofer	89
Gruppo Continuità 500VAi da	199
Mobili PortaComputer da	84

Disponibile tutta la linea Microsoft

OFFERTE

Kit Multimedia
Lettore CD-ROM 36x
Scheda Sound 16bit PnP
Casse Acustiche + Microfono
a sole **122**

Masterizzatori Riscrivibili

Philips	6x2x2 EIDE	**468**
Yamaha	6x2x2 SCSI	**478**
Yamaha	**6x4x2** EIDE	**699**

Kit Software

Microsoft Home Essential
(Word97 - Money97 - Atlante Encarta - ecc.)
a sole **212**

Microsoft Office97
Small Buisness Edition
a sole **389**

***Nuovo* Windows98**
a sole **178**

Realizzazione Grafica AREA Creazioni Pubblicitarie

Telefonare per le quotazioni aggiornatissime

ROMA - Via Tuscolana 261 - 00181 - 06 / 7810593 - 7820573 - 7803856 (Fax)
Orario = 9:30 - 13:00 / 16:00 - 19:30 Lunedi' Mattina Chiuso **Hot Line Tecnica : 786404**

Telefonateci per la Vostra Configurazione Personalizzata: Sapremo darVi il Meglio !!

Tutti i prezzi si intendono IVA esclusa e validi fino esaurimento merce. Le cifre, tranne dove indicato dal simbolo £, sono in migliaia di lire. Prezzi correlati cambio US$=1.750Lit.