

OTTICA

Questo mese presentiamo ancora una tesi di laurea in Scienze dell'Informazione. Si tratta della costruzione con *Mathematica* di un pacchetto per la generazione di immagini per la didattica dell'ottica geometrica.

di Barbara Baldini e Francesco Romani

Introduzione

Quest'articolo presenta i risultati di una tesi di laurea che ho seguito presso il Dipartimento di Informatica dell'Università di Pisa insieme alla Professoressa Ornella Sebellin, docente di Matematica presso l'istituto d'arte "Russoli" di Pisa. Dal molto materiale disponibile abbiamo tratto solo alcune immagini che, opportunamente commentate, danno una spiegazione ad alcuni interessanti fenomeni.

Vale la pena di aggiungere che nella tesi sono presenti anche programmi *Mathematica* che oltre alla generazione di immagini consentono di studiare leggi fisiche e risolvere problemi grafici e algebrici connessi alle questioni di ottica ivi trattate.

Il principio di Fermat

Il comportamento della luce nei confronti di materiali riflettenti (specchi) e materiali trasparenti di varie forme (lastre, lenti, prismi) è stato studiato a lungo sia dal punto di vista sperimentale che dal punto di vista teorico. Una spiegazione completa del comportamento della luce può essere ottenuta attraverso le leggi della elettrodinamica quantistica (si veda in proposito l'ottimo testo divulgativo di Feynman).

Da un punto di vista pratico esiste una legge empirica (il **principio di Fermat**) che afferma che il percorso di un raggio di luce tra due punti A e B è quello che minimizza il tempo del percorso.

In altre parole se la luce viaggia in un mezzo con velocità costante allora si propaga in linea retta (con eventuali riflessioni se incontra una superficie speculare). Ogni volta che cambia la velocità della luce (ad esempio nel passaggio dall'aria al vetro di una lente) allora si ha una deviazione detta rifrazione di una entità tale da assicurare il rispetto del principio di Fermat.

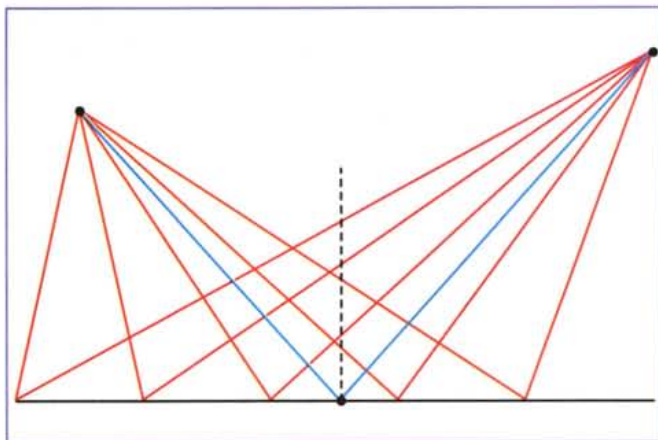


Figura 1

Riflessione

Consideriamo una superficie speculare ed un raggio di luce incidente sulla superficie. La direzione del raggio dopo la riflessione dipende dalla sua direzione iniziale e dall'orientamento della superficie riflettente, secondo quanto affermato dalla **legge della riflessione**, enunciata la prima volta da Euclide.

Tale legge può essere così espressa: il raggio incidente ed il raggio riflesso formano angoli uguali con la normale (la retta perpendicolare alla superficie) nel punto di incidenza. I due angoli vengono detti rispettivamente angolo di incidenza ed angolo di riflessione; i due raggi e la normale sono, inoltre, coplanari, cioè giacciono su di uno stesso piano. Nella **Figura 1** si vedono vari possibili cammini (in rosso) mentre il cammino di lunghezza e tempo minimo è raffigurato in azzurro.

Rifrazione

Esaminiamo, ora, il fenomeno della rifrazione. La legge della rifrazione descrive il comportamento di un raggio di luce (che supporremo monocromatico) passante da un mezzo isotropo ad un altro mezzo isotropo.

Si definisce indice di rifrazione n_a di un mezzo trasparente a il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e quella nel mezzo in questione.

La legge della rifrazione (che può anch'essa essere dimostrata in base al principio di Fermat) afferma che nel passare da un mezzo a ad un mezzo b vale la formula

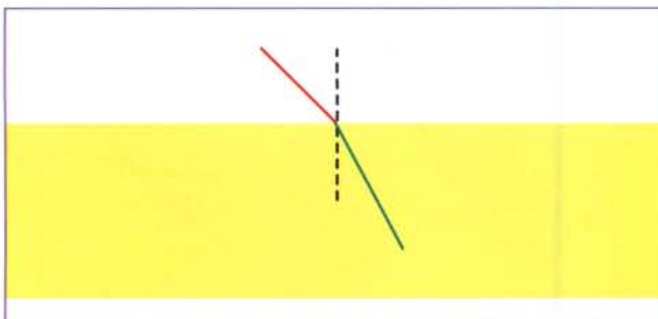
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_b}{n_a}$$

che lega il valore dei seni degli angoli di incidenza α e di rifra-

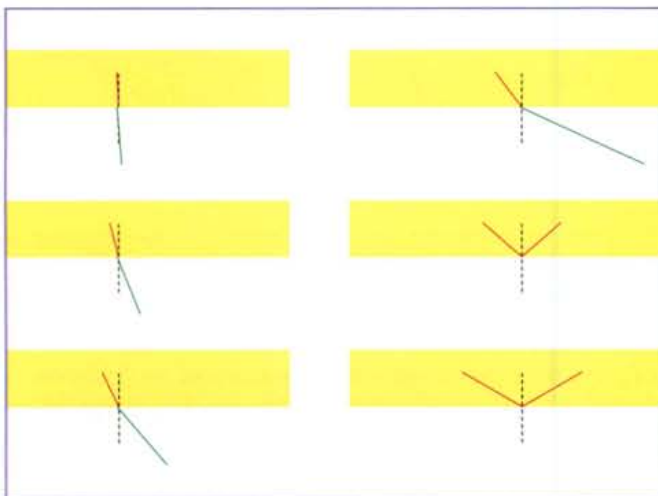


zione β che il raggio luminoso forma con la normale con le velocità della luce nei mezzi a e b.

Nel caso del passaggio da un mezzo con basso indice di rifrazione (aria, vuoto) ad uno con alto indice di rifrazione (acqua, vetro) il raggio subisce una deviazione avvicinandosi alla perpendicolare. (Figura 2)



Nel caso del passaggio da un mezzo con alto indice di rifrazione ad uno con basso indice di rifrazione il raggio subisce una deviazione allontanandosi dalla normale. Quando si raggiunge un certo angolo detto **angolo limite** il raggio non riesce più ad essere rifratto ma viene riflesso totalmente. (Figura 3)



Le Fibre Ottiche

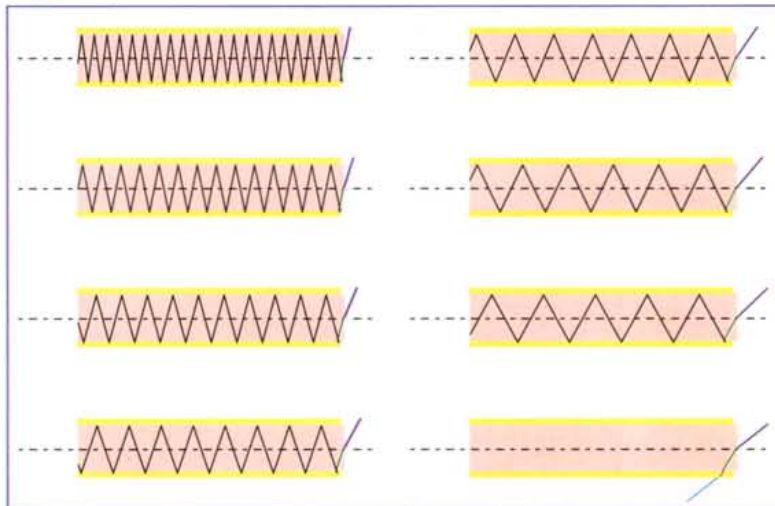
Le fibre ottiche constano di sottili filamenti di materiale trasparente (vetro, materie plastiche o minerali fibrosi) e consentono, tramite riflessioni totali successive, di intrappolare e guidare la luce al loro interno dall'estremo di entrata all'estremo di uscita.

Le fibre possono venire riunite in fasci; si possono avere fibre con diametri di 0.01 millimetri e in un fascio si possono avere migliaia di fibre. Se le sezioni d'ingresso e di uscita del fascio sono piane, l'immagine all'ingresso si ritrova identica all'uscita. Si è verificato sperimentalmente che esse producono una buona trasmissione anche per notevoli lunghezze.

Le fibre ottiche utilizzate in pratica hanno una struttura riconducibile ad un nucleo centrale ad alto indice di rifrazione, circondato da un rivestimento a basso indice di rifrazione

Consideriamo, ad esempio, una fibra ottica costituita da vetro (in rosa), rivestita di un materiale a minor indice di rifrazione (in giallo) ed immersa nell'aria. Si può dimostrare che la fibra ottica funziona solo a partire da un opportuno angolo di incidenza.

(Figura 4)

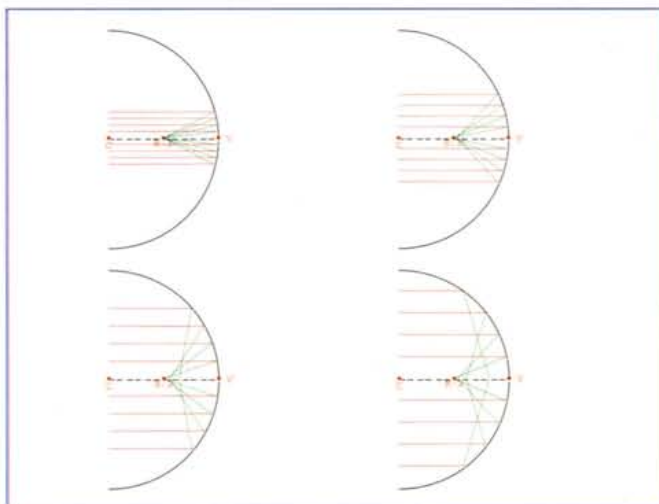


Specchi sferici e parabolici

Gli specchi sferici sono delimitati da una calotta sferica, ovvero da una porzione di sfera e vengono classificati in concavi e convessi a seconda se la superficie riflettente è o meno quella rivolta verso il centro della sfera. Il centro ed il raggio della sfera vengono rispettivamente detti centro e raggio di curvatura; l'asse ottico è la perpendicolare alla base della calotta condotta dal centro di curvatura, mentre l'intersezione di tale asse con la calotta è detto vertice dello specchio. Definiamo, infine, l'angolo di apertura come l'angolo al centro della calotta sferica.

In figura 5 sono mostrati quattro specchi aventi lo stesso raggio $R=5$, sui quali incidono fasci di otto raggi paralleli spazati di un valore $k=0.3$ nel primo caso, $k=0.5$ nel secondo, $k=0.8$ nel terzo e $k=1$ nel quarto.

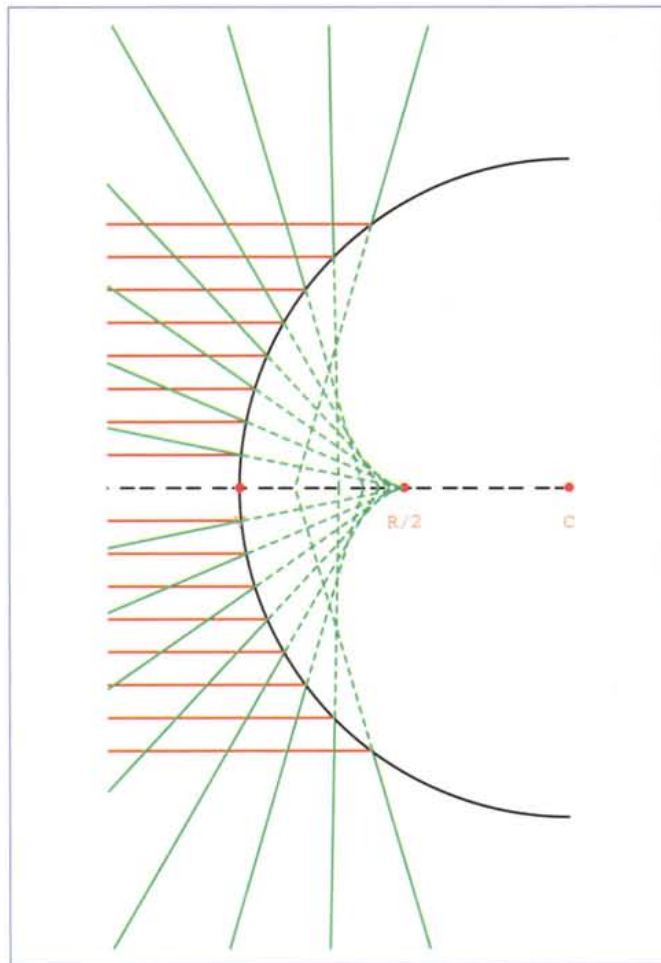
Al diminuire di k , i raggi riflessi dallo specchio tendono a convergere in un unico punto posto sull'asse ottico e distante circa $R/2$ dal centro di curvatura: chiameremo questo punto fuo-





co dello specchio. Viceversa, all'aumentare di k , i raggi riflessi tendono ad incontrare l'asse ottico in punti diversi ed il fuoco non è, quindi, definito. Tale fenomeno è noto come aberrazione di sfericità.

Come per gli specchi concavi, anche per gli specchi convessi si verifica il fenomeno dell'aberrazione, ma questa volta non per i raggi riflessi, bensì per i loro prolungamenti (**Figura 6**).

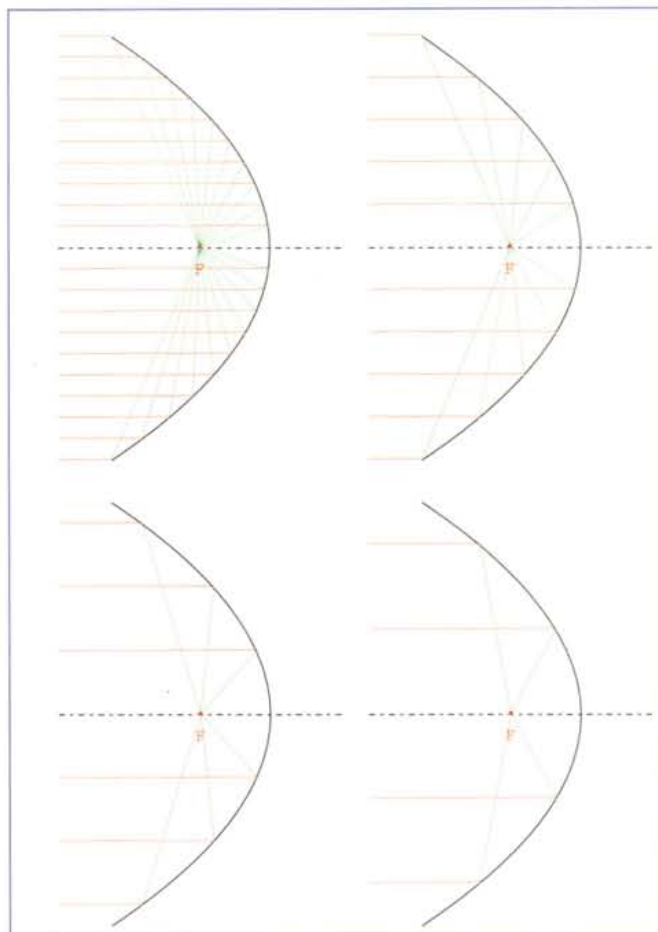


Specchi parabolici

La superficie di uno specchio parabolico si può generare con la rotazione di una parabola di fuoco F attorno al proprio asse. Lo specchio è concavo se la superficie riflettente è rivolta verso F , convesso altrimenti. L'asse, il vertice e il fuoco dello specchio sono gli elementi omonimi della parabola generatrice.

In **figura 7** riportiamo quattro esempi differenti tra loro per la spaziatura tra i raggi incidenti: nel primo caso $k=0.3$, nel secondo caso $k=0.6$, nel terzo caso $k=0.9$ e nel quarto $k=1.2$. È importante notare che in nessuno di questi casi si verifica alcuna aberrazione.

Consideriamo ora due specchi parabolici $S1$ e $S2$ concavi e sovrapposti, ciascuno, approssimativamente, con il fuoco nel vertice dell'altro.

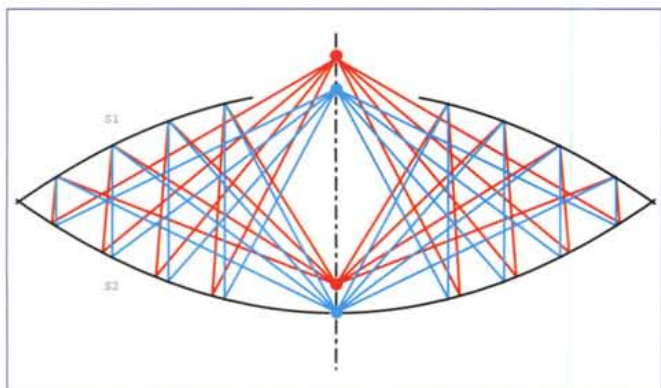


Poniamo un punto luminoso (rappresentato da un punto azzurro) nel vertice di $S2$ ed analizziamo il percorso di un raggio diretto verso $S1$.

La prima osservazione da fare è che, qualsiasi sia l'inclinazione di questo raggio rispetto all'asse ottico dei due specchi, esso verrà riflesso parallelamente all'asse stesso (perché passante per il fuoco) e diretto verso $S2$. Una volta giunto sulla superficie di $S2$, il raggio verrà riflesso una seconda volta e questa volta verrà diretto esattamente nel fuoco di $S1$ (perché incidente parallelamente all'asse). L'immagine del punto luminoso si forma nel fuoco di $S1$.

Poniamo, ora, un altro punto luminoso (il punto rosso) leggermente al di sopra del vertice di $S2$ e vediamo cosa accade. Il fascio di raggi incidenti, aventi origine nell'oggetto luminoso, è omocentrico e, di conseguenza, anche il fascio di raggi riflessi la prima volta risulta omocentrico. I raggi riflessi la seconda volta, avendo origine dai raggi riflessi la prima volta, si dimostrano anch'essi omocentrici. Il fenomeno è raffigurato in **Figura 8**; risulta chiaro che i raggi riflessi la prima volta sono leggermente inclinati rispetto all'asse degli specchi. Da questo fatto, consegue la formazione di un'immagine non più posta nel vertice di $S1$, bensì leggermente al di sopra di esso.

Se invece dei due punti si considera un oggetto esteso, ogni raggio uscente da questo avrà un percorso analogo. Se lo



specchio superiore viene dotato di una piccola apertura intorno al suo vertice, l'immagine dell'oggetto luminoso, del tutto simile all'originale, diviene visibile anche ad un osservatore posto all'esterno, ma quando si tenta di afferrarla ci si ritrova con un pugno d'aria!

Questo esperimento è un gadget brevettato, regolarmente in commercio nei negozi di giocattoli scientifici, ed è proprio da un contatto diretto che ci è venuta voglia di esplorarne il funzionamento con *Mathematica*.

Si noti che se nel disegno si tracciano i raggi uscenti dal punto rosso diretti verso il basso questi convergono in un punto centrale posto al di sotto del punto azzurro. Nella pratica l'oggetto collocato nel vertice di S2 appare nel vertice di S1 come se fosse posato su di uno specchio piano su cui la parte inferiore dell'oggetto appare riflessa.

L'arcobaleno

Il primo tentativo di spiegazione razionale della formazione dell'arcobaleno fu, probabilmente, quello di Aristotele: egli suggerì che l'arcobaleno fosse un insolito tipo di riflessione della luce solare da parte delle nubi. La luce viene riflessa secondo un angolo fisso, dando luogo a un cono circolare di raggi di arcobaleno. Aristotele spiegò dunque correttamente la forma circolare dell'arco e capì che non si trattava di un oggetto materiale con una precisa collocazione nel cielo, ma piuttosto di un insieme di direzioni lungo le quali la luce viene fortemente diffusa verso gli occhi dell'osservatore. Dopo Aristotele, passarono circa 17 secoli prima che si facesse un altro passo avanti nella teoria dell'arcobaleno.

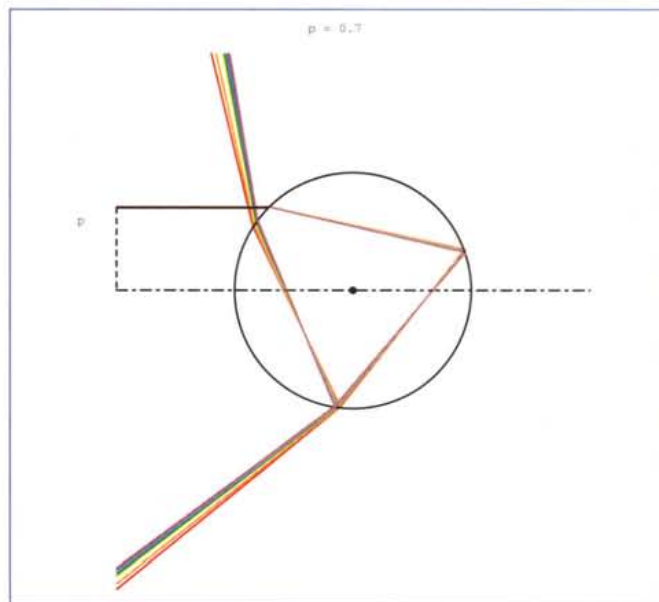
Nel 1304, il monaco tedesco Teodorico di Freiberg respinse l'ipotesi di Aristotele, secondo la quale l'arcobaleno risultava da una riflessione collettiva da parte delle gocce d'acqua di una nube. Il monaco suggerì, invece, che ogni singola goccia d'acqua fosse capace di produrre un arcobaleno. Egli fu in grado anche di tracciare il cammino di un raggio di luce solare all'interno di una goccia.

Tale teoria fu poi ripresa da Cartesio e perfezionata ai giorni nostri, alla luce delle moderne teorie ottiche.

Un raggio incidente parallelamente all'asse della goccia subisce una prima rifrazione, penetrando nella goccia. Successivamente viene riflesso e nuovamente rifratto. I raggi che entrano

nella goccia e vengono riflessi una volta prima di uscire dalla goccia stessa formano il cosiddetto **arcobaleno primario**. Quelli riflessi due volte prima di uscire sono meno luminosi e formano l'**arcobaleno secondario**. Gli arcobaleni di ordine superiore hanno origine da raggi che subiscono più di due riflessioni, ma, solitamente, non sono sufficientemente luminosi per essere visibili.

Il diverso indice di rifrazione dell'acqua nei confronti dei vari colori permette la dispersione della luce incidente e la conseguente formazione dell'arcobaleno. Verifichiamo graficamente questo fenomeno, facendo incidere un fascio di raggi colorati (**Figura 9**).



Definiamo angolo di diffusione di un raggio di arcobaleno, l'angolo formato dalla direzione di questo e dalla direzione del raggio incidente sulla goccia. A causa del diverso indice di rifrazione dell'acqua al variare del colore del raggio incidente, l'angolo di diffusione sarà diverso per ogni colore. Per l'arcobaleno primario il rosso ha angolo di diffusione minore di quello di qualsiasi altro colore, mentre il violetto ha il maggiore. Esattamente il contrario succede per l'arcobaleno secondario, che, rispetto a quello primario, avrà, quindi, i colori invertiti. (Ve ne eravate mai accorti?).

MS

Bibliografia

Quaderni delle Scienze n. 78: **Il colore**, 1994.

Feynman, **QED, la strana storia della luce e della materia**, Adelphi, 1989.

Hect, **Ottica**, Etas Libri, 1981.

Kingslake, Thompson, **Applied optics and optical engineering vol. II**, Academic Press, 1980.

Persico, **Ottica**, Zanichelli, 1979.