Frattali & C.

Questo mese presento una galleria di immagini di notevole complessità: alcune sono "frattali" nel senso pieno del termine, altre sono immagini dalla struttura matematicamente più semplice, ma non meno appariscente dal punto di vista estetico. La maggior parte degli esempi sono tratti dal libro di Stan Wagon Mathematica in Action (ora tradotto anche in italiano). I programmi sono stati rimaneggiati da me, aggiungendovi il colore e riadattandoli dal punto di vista estetico. La trattazione è molto sbrigativa visto che l'obiettivo è solo mostrare dei grafici particolarmente significativi. Se mi mandate per E-mail i vostri gradimenti (o critiche), dedicherò un'intera puntata all'argomento più gettonato

di Francesco Romani

1. Le rose di Maurer

Abbiamo già visto in passato una margherita ottenuta come grafico della funzione polare ρ=n sin θ. Le rose di Maurer si ottengono anch'esse dalla stessa funzione facendovi ruotare sopra segmenti in modo opportuno. Il programma seguente è un rimaneggiamento di quello di [Wagon, §4.1]. Alcuni esempi sono esposti in **Figura 1** insieme con i valori usati per generarli.

In[1]:=

```
rect[theta_, r_] :=
 N[{r Cos[theta], r Sin[theta]} ];
```

In[2]:=

```
MaurerRose[{n_,d_}] :=
 Module[{zz, cc, l, z=360, i=0},
  zz = If[!EvenQ[n], 180, 360];
  l = GCD[d, zz] - 1;
  rose[i_]:=rect[i 2 Pi/z, Sin[n i 2Pi/z]];
  cc=Table[{Hue[i++/l], Line[rose /@
     Range[m,m+LCM[d,zz],d]]},{m,0,l}];
  Show[Graphics[cc],
      PlotLabel->ToString[{n,d}],
      AspectRatio->1]]
```

2. Tassellazioni del piano

Il problema di ricoprire il piano con piastrelle di varia foggia è stato molto studiato [Gardner, Grünbaum]. Particolarmente interessanti sono le piastrellature aperiodiche di Penrose con speciali piastrelle: gli aquiloni e le frecce (blu e bianchi) e due tipi di rombi (rossi e bianchi). La **Figura 2** mostra due frammenti triangolari di piano, piastrellati in questo modo. I programmi si trovano in [Wagon, §4.3].

Su *MathSource* (item 207-212) si trova il notebook *Some Nice Pictures of Hyperbolic Tiling of Poincare Disk* con un interessante esempio di piastrellatura di una superficie non euclidea. Vedi **Figura 3**.

3. L'isola di Koch

È forse il frattale più semplice da disegnare. Si parte con un triangolo equilatero (in rosso in **Figura 4**) e lo si trasforma aggiungendo ad ogni suo lato un picco (in verde in Figura 4). Il processo è ripetuto infinite volte su ognuno dei segmenti. La curva limite è detta "fiocco di neve di Koch" ed ha perimetro infinito, ma la parte interna, detta "isola di Koch" ha area finita. In **Figura 5** si vede la sovrapposizione delle prime cinque iterate (cambiando colore ogni volta per evidenziare le ag-

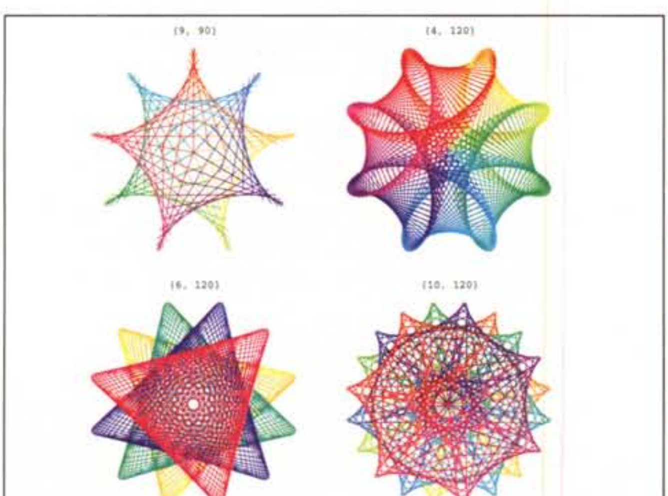


Figura 1

Figura 2

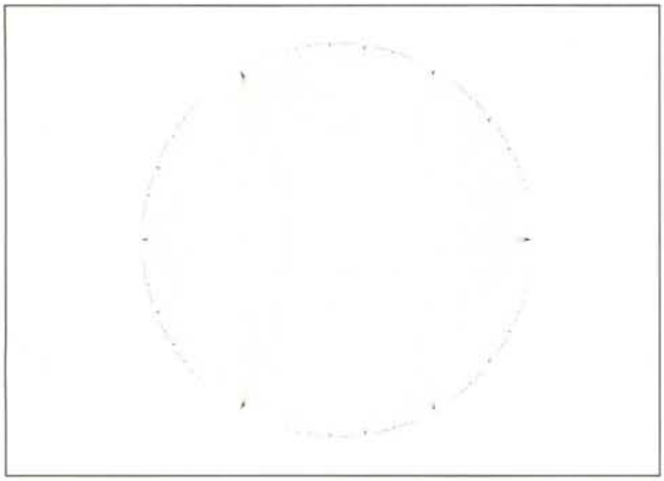


Figura 3

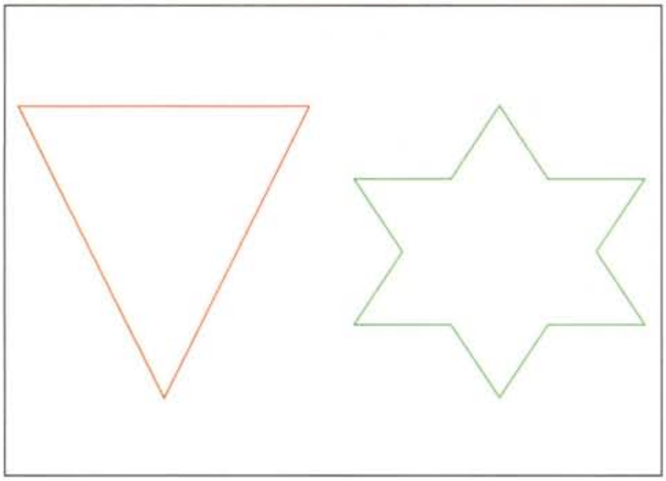


Figura 4

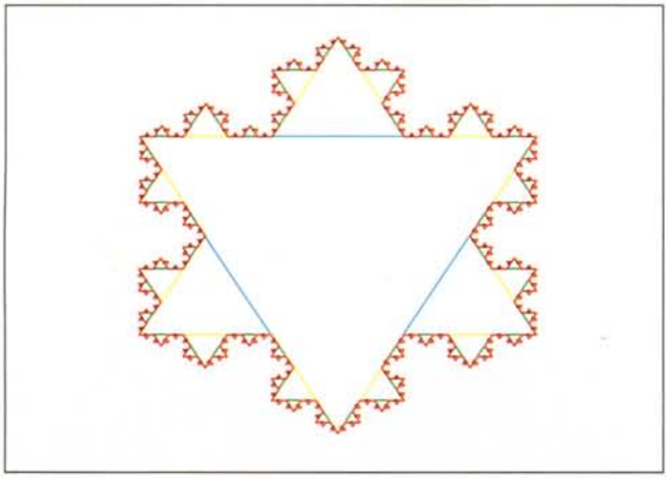


Figura 5

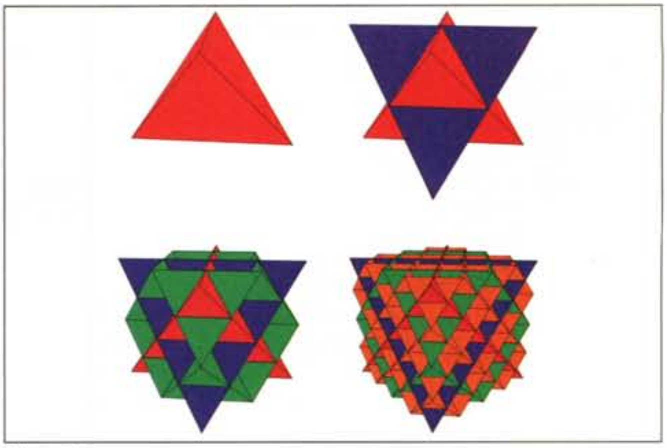


Figura 6

giunte). Il programma è quello di [Wagon, §6.2] che usa una "tartaruga" programmata in *Mathematica*.

4. Il pianeta di Koch

Generalizzando in tre dimensioni il procedimento che genera l'isola di Koch si può di costruire il "pianeta di Koch" a partire da un tetraedro regolare. Ogni faccia del tetraedro si divide in quattro triangoli uguali unendo i punti di mezzo degli spigoli. Poi si costruisce un tetraedro sul triangolo centrale. La prima iterazione produce un poliedro con 24 facce ognuna delle quali è un triangolo equilatero. La ripetizione senza fine del processo porta ad un oggetto limite che è... semplicemente un cubo (una scoperta di B. Mandelbrot). Nella **Figura 6** sono presentate le prime quattro iterazioni del processo. Il programma è quello di [Wagon, §7.6].

5. Il triangolo di Sierpinski

Analogo all'isola di Koch è il triangolo di Sierpinski, anch'esso ottenuto per successivi rimaneggiamenti di un triangolo equilatero **(Figura 7)**. Suggestivo è il risultato che si ottiene aggiungendo triangoli colorati invece che linee nere. Il programma è modificato da quello in [Wagon, §4.2] **(Figura 8)**.

6. La felce di Barnsley

Data una funzione $f:R^2 \rightarrow R^2$ ovvero che trasforma punti del piano in punti del piano si può considerare l'insieme infinito delle iterate f(0,0), f(f(0,0)), f(f(f(0,0))), ... e disegnarlo sul piano. Vediamo un programma per disegnare le prime n iterazioni, usando la variazione di colore per mostrare come i punti si muovono.

In[1]:=

```
IFS[f_,n_] :=(i=0;
Show[Graphics[
  Map[{Hue[N[i++/n]],Point[#]}&,
       NestList[f, {0.,0.}, n]],
       PlotRange->All, AspectRatio->1]])
```

Proviamo per una f che combina una leggera rotazione e un leggero avvicinamento verso il punto (0.5,0.5).

In[2]:=

```
f1[x_List]:=
 {{0.98,-0.09},{0.09,0.98}}.(x-{0.5,0.5})
IFS[f1,800]
```

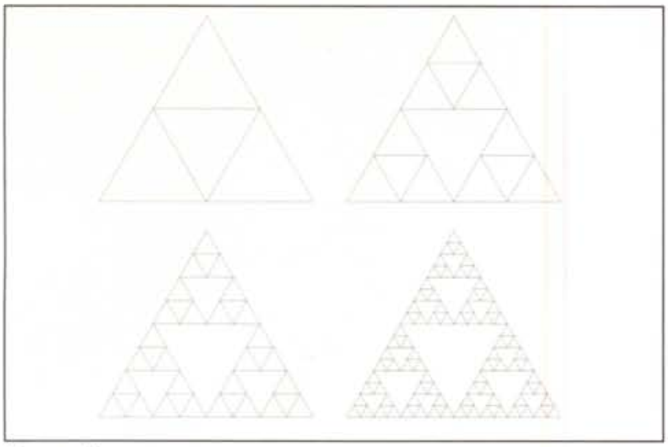


Figura 7

Il risultato è una spirale in avvicinamento verso (0.5,0.5) **(Figura 9)**.

Ovviamente l'insieme generato da **IFS** può esibire une grande varietà di comportamenti.

Se la funzione f ha un comportamento casuale (per esempio scegliendo tra diverse trasformazioni in base ad un'estrazione di un numero pseudocasuale) l'insieme dei punti può avere un aspetto molto grazioso.

In[3]:=

```
sier[{x_,y_}]:=Which[
  (r=Random[Integer,{1,3}]) ==  1,
              {x/2.,y/2.},
   r ==  2,   {x/2.+1.,y/2.},
   r ==  3,   {x/2.+1./2.,y/2.+0.866025} ]
IFS[sier,5000];
```

Il risultato è una versione "approssimata" del triangolo di Sierpinski **(Figura 10)**.

In[4]:=

```
Fern[{x_,y_}]:=Which[
(r=Random[Integer,{1,100}])<=85,
       {0.85 x+0.04 y,1.6-0.04 x+0.85 y},
r<=92, {-0.15 x+0.28 y,0.44+0.26 x+0.24 y},
r<=99, {0.2 x-0.26 y,1.6+0.23 x+0.22 y},
r==100,{0,0.16 y}]
IFS[fern,10000];
```

Il risultato è la cosiddetta felce di Barnsley **(Figura 11)** un bellissimo esempio di pianta frattale, si veda anche [Wagon, §5.3].

7. La transizione al caos

Consideriamo un funzione f da R a R; fissato un valore di partenza x l'insieme {x,f(x), f(f(x)), ...} è detto orbita di x. A seconda della funzione e del punto di partenza l'orbita può: (1) convergere a un punto fisso, soluzione di x=f(x) (provate con cos(x)); (2) dopo una fase di assestamento oscillare intorno ad un insieme finito di valori; (3) divergere all'infinito; (4) rimanere limitata senza convergere assumendo infiniti valori (in questi casi il comportamento è detto caotico). La funzione dipendente da un parametro, definita dalla relazione $f_r(x) = rx(1-x)$ a seconda dei valori di r presenta tutti questi comportamenti. Per r<3 c'è un punto fisso attrattivo e quindi le orbite convergono ad esso. In r=3 si ha una biforcazione, per valori subito

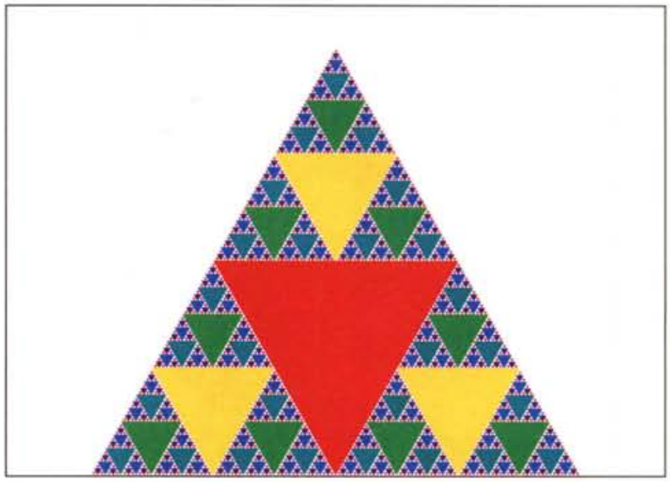


Figura 8

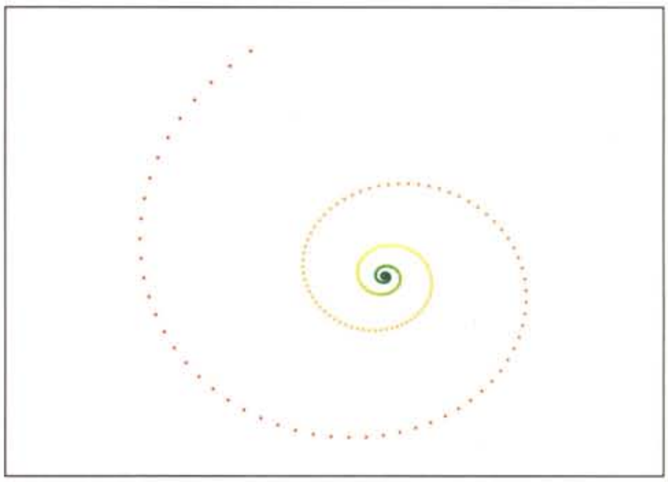


Figura 9

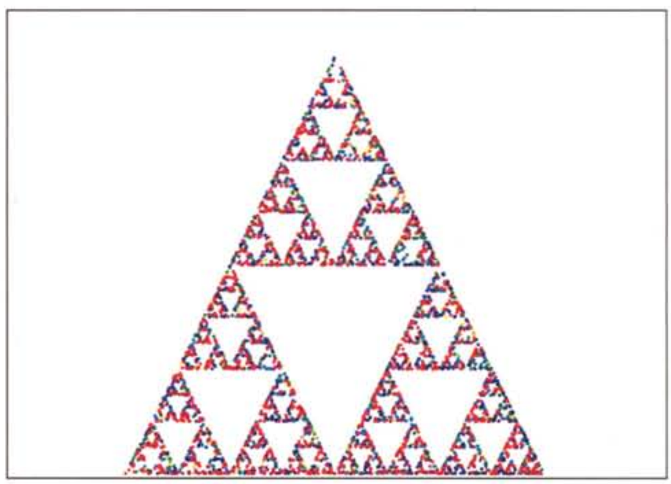


Figura 10

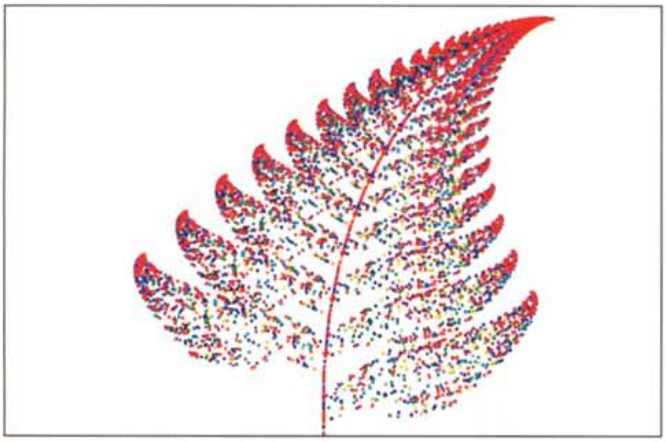


Figura 11

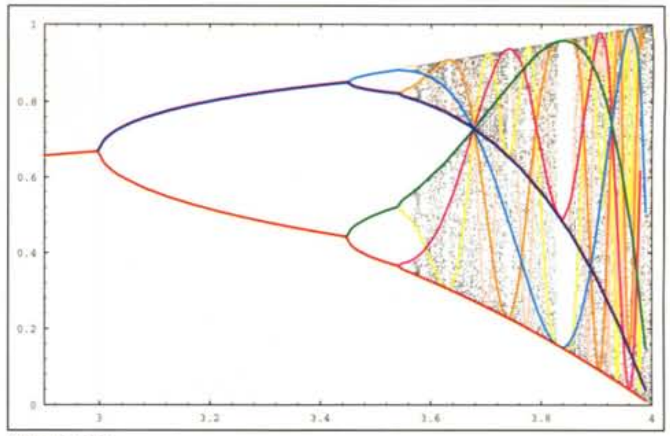


Figura 12

maggiori il punto fisso diviene repulsivo ed esistono orbite di periodo 2. Dopo un po' il periodo diviene 4, poi 8 e, sempre più rapidamente, 16, 32, ... fino alla comparsa del comportamento caotico. Per valori più elevati esistono "finestre" di stabilità in cui si ha di nuovo periodo piccolo.

Lo studio delle orbite in funzione del punto di partenza nel campo complesso porta a trattare gli insiemi di Julia e di Mandelbrot, frattali molto noti che meriterebbero una trattazione a parte.

Il comportamento a partire da un punto determinato (es. 0.5) si può ottenere con *Mathematica*, facendo prima assestare la funzione (calcolando ad esempio 500 iterazioni):

In[1]:=
```
f=Compile[{x},r x(1-x)];
r=3.2;
s=Nest[f,0.5,500];
```

e generando poi la lista delle iterazioni successive:

In[2]:=
```
NestList[f,s,5]
```

Il grafico del comportamento di f_r nella regione delimitata da $2.9 < r < 4$ è anch'esso molto noto. Ho trovato un programma molto rudimentale nel notebook **chaos.ma** compreso tra i Sample Notebook di *Mathematica* dove il diagramma viene generato e suonato (sic!). Una trattazione estesa con riferimenti bibliografici si trova in [Wagon,§4.4], si veda anche il capitolo 7 di [Gray]. Un package esplorativo scritto da Roman Maeder con *notebook* esemplificativo si trova nel *Mathematica Journal,* Visto che MCmicrocomputer è stampata a colori ho voluto rimaneggiare un diagramma generato dai programmi [Maeder] sovrapponendovi delle curve colorate **(Figura 12)**.

La trattazione che segue è farina del mio sacco (anche se non escludo che si possa trovare già pubblicata altrove). Per ogni $2.9 < r < 4$ si può definire univocamente una funzione g(r) come il limite inferiore delle orbite di 0.5. Una buona approssimazione si ottiene con

```
g[rr_]:=(
  r=rr;
  Min[NestList[f,Nest[f,0.5,1000],500]])
```

Si puo fare con facilità il grafico di g(r) che corrisponde al bordo inferiore del diagramma (in rosso), il grafico di g(g(r)) che corrisponde alla prima biforcazione (blu), i grafici di di g(g(g(r))) e g(g(g(g(r)))), che corrispondono alla seconda e terza biforcazione (ciano e verde), e così via. Per accelerare l'elaborazione la curva rossa è stata calcolata in 500 punti e poi approssimata con **`Interpolation[]`**, rendendo così rapidissimo il calcolo delle altre curve.

Si intuisce come la presenza del caos si possa attribuire alla sovrapposizione di infinite di queste curve in zone di alta oscillazione, mentre zone di maggiore stabilità si presentano dove le curve si raggruppano e cessano di oscillare.

8. Bibliografia

M. Gardner. *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers,* W. H. Freeman (1989).

B. Grünbaum, G. C. Shepherd, *Tiling and Patterns,* W. H. Freeman (1986).

T.W. Gray, J. Glynn, *Exploring Mathematics with Mathematica,* Addison Wesley (1991).

R. Maeder. *Function Iteration and Chaos.*The *Mathematica* Journal. Vol. 5 n. 2 (1995).

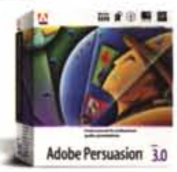
S. Wagon, *Mathematica in Action,* W. H. Freeman (1991), traduzione italiana, Mc Graw Hill (1995).

MC

Francesco Romani è raggiungibile tramite Internet all'indirizzo romani@di.unipi.it

Da farsi in giornata!

Adobe PostScript



Indicazioni insufficienti

Richieste assurde

Consegne impossibili

Perché lo fai? Perché è ciò che ti piace fare. E anche perché c'è il software Adobe™ per ogni fase del tuo lavoro, rendendo tutto molto più facile.

Pensa a noi come ad un partner creativo anche se siamo puntuali e non facciamo pause pranzo. Hai bisogno di spingere un'idea, con forte impatto visivo. Tu ci metti il talento e l'immaginazione; prodotti come Adobe Photoshop™ e Adobe Illustrator™ sono i mezzi per dare corpo ai tuoi bozzetti, i caratteri Adobe per il tocco di classe nel testo.

Devi mettere tutto insieme. Rapidamente e funzionalmente, Adobe PageMaker™ dà la velocità e la flessibilità di progettare e comporre layout innovativi ed eleganti, mentre Adobe Premiere™ te li fa presentare animati con video e suono.

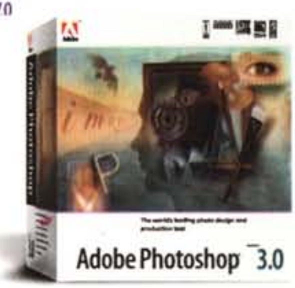
Poi devi distribuire il lavoro. Sei sicuro che la qualità della stampa sia quella che ti aspetti? Se richiedi al tuo stampatore di usare i prodotti Adobe Prepress come TrapWise, certo non avrai la sorpresa di quel filo bianco tra due aree di colore nella tua illustrazione. Infine, Adobe Acrobat™ ti fa pubblicare il tuo lavoro nel cyberspazio di Internet, indifferentemente dal computer che usi.

In un modo o nell'altro, in qualunque fase, tutti i prodotti Adobe ti aiutano a consegnare un bel lavoro. Infatti, qualunque cosa tu faccia... creazione, composizione o distribuzione, c'è Adobe assieme a te.

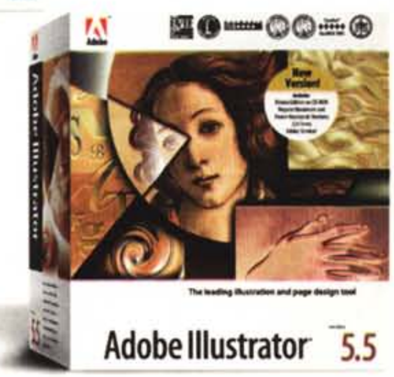
E puoi star certo che tutto questo funziona, perché alla base c'è la qualità e la precisione del linguaggio di descrizione pagina Adobe PostScript™. Strumenti che promettono una buona giornata di lavoro, al servizio della tua creatività.

Per maggiori informazioni, contatta il tuo rivenditore di fiducia o richiedile via fax allo 039/655050.

Questo annuncio è stato creato integralmente con software Adobe.



Visitateci allo SMAU 95 Padiglione 21 Stand C11



Adobe™

It's everything you imagine