

# Primi passi con Mathematica

*Dopo la presentazione generale del sistema vediamo alcuni esempi elementari di come si può usare questo sistema. Nelle prime due puntate vedremo l'uso interattivo di Mathematica, nel seguito vedremo alcuni aspetti della grafica e delle possibilità di programmazione. Naturalmente molti degli esempi che presentiamo in queste pagine sono di natura prettamente matematica ed alcuni di essi risulteranno poco comprensibili o poco interessanti per alcuni lettori; d'altra parte lo scopo di questi articoli è di introdurre i lettori a scoprire quale e quanta parte del loro lavoro matematico possa essere portata a termine con strumenti software di questo tipo. Non abbiamo l'intenzione di scrivere un manuale di Mathematica, ma solo di dare delle idee e «stuzzicare l'appetito»*

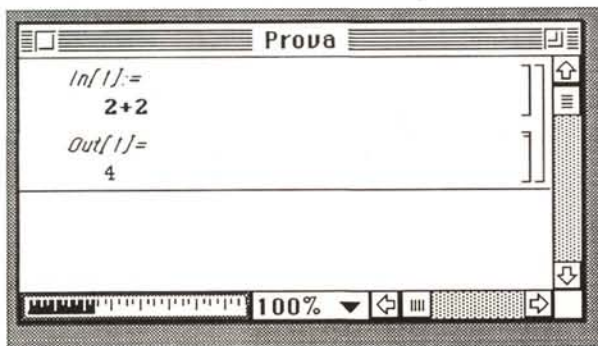
*di Francesco Romani*

## Un esempio di seduta con Mathematica

In questo articolo descriveremo una sessione tipo di *Mathematica* con il *Front-end* del Macintosh. Come abbiamo visto nel precedente articolo *Mathematica* si compone di due moduli principali, il *Front-end* e il *Kernel*. Il *Front-end* realizza l'interfaccia utente. Il *Kernel* di *Mathematica* realizza il «motore computazionale». Nell'uso più semplice riceve le celle dal *Front-end* e ne esegue il contenuto. Quando si fa partire l'applicazione si deve attendere alcuni secondi perché il *Kernel* sia inizializzato e attivo. Il modo più pratico per vedere se il *Kernel* è pronto è mandare un comando: si scrive  $2+2$  in una cella di input e si preme ENTER, (se risponde 4 il gioco è fatto!)

```
In[1]:=
2+2
Out[1]:=
4
```

Il *Kernel* riceve la cella, a cui viene aggiunta un'etichetta (in questo caso In[1] perché si tratta della prima valutazione). Subito dopo viene restituito il risultato in una cella di output anch'essa evidenziata da una etichetta (in questo caso Out[1], vedi figura).



Nel seguito i comandi in input verranno scritti in Courier Bold e i risultati nelle righe successive in Courier Plain, i numeri di In e Out in Helvetica Corsivo.

I comandi più comuni sono le espressioni aritmetiche

che seguono la ordinaria notazione matematica, il segno di moltiplicazione può essere omesso oppure indicato con un asterisco.

```
In[2]:=
3 (5+7) - 24 * 3/2
Out[2]:=
0
```

Il risultato di una espressione può essere assegnato ad una variabile, se il comando non è terminato da un punto e virgola, il risultato viene anche stampato

```
In[3]:=
x=3
Out[3]:=
3
In[4]:=
x=3;
Out[4]:=
x=6
In[5]:=
x+6
Out[5]:=
9
```

Il risultato dell'ultimo comando eseguito può essere richiamato con il simbolo %

```
In[6]:=
%+10
Out[6]:=
19
```

Tutti i comandi eseguiti possono essere richiamati con la Funzione In[] e tutti i risultati con la funzione Out[], la principale differenza è che nel primo caso l'espressione viene valutata di nuovo e nel secondo viene solamente richiamato il risultato.

```
In[7]:=
x=5;
In[8]:=
x+1
```

```
Out[8]=
6
In[9]:=
x=10;
In[10]:=
In[8]
Out[10]=
11
In[11]:=
Out[8]
Out[11]=
6
```

Clear «ripulisce» la variabile; le variabili vuote hanno un valore simbolico e restano non valutate

```
In[12]:=
Clear[x]
In[13]:=
x+1
Out[13]=
1 + x
```

Mathematica contiene quasi un migliaio di funzioni predefinite ognuna delle quali può essere valutata senza limiti per l'argomento (a parte quelli di natura matematica). Ad esempio il fattoriale (il prodotto dei primi numeri interi) si ottiene con la funzione Factorial, senza limiti alla grandezza dei numeri interi risultanti.

```
In[14]:=
Factorial[22]
Out[14]=
1124000727777607680000
In[15]:=
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
Out[15]=
1124000727777607680000
In[16]:=
Factorial[100]
Out[16]=
93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895\
21759993229915608941463976156518286253697920827223758251185210\
9168640000000000000000000000000000
```

Binomial[k,h], calcola il coefficiente binomiale  $\binom{h}{k}$ , (si noti l'inversione degli argomenti).

```
In[17]:=
Binomial[3,2]
Out[17]=
3
In[18]:=
Binomial[200,100]
Out[18]=
90548514656103281165404177077484163874504589675413336841320
```

La radice quadrata è definita per ogni valore dell'argomento, anche negativo o complesso, il simbolo I rappresenta l'unità immaginaria e i numeri complessi si scrivono come a + I b.

```
In[19]:=
Sqrt[4]
Out[19]=
2
In[20]:=
Sqrt[-1]
Out[20]=
I
```

Altri identificatori sono associati a speciali costanti matematiche: Pi rappresenta  $\pi$  ed E la base dei logaritmi naturali e. Se non richiesto esplicitamente tali costanti non vengono valutate, come d'altronde non vengono valutate le funzioni applicate a numeri interi o razionali. Comunque Mathematica conosce molte identità notevoli:

```
In[21]:=
Pi
Out[21]=
Pi
In[23]:=
Cos[2]
Out[23]=
Cos[2]
In[24]:=
Cos[Pi]
Out[24]=
-1
In[25]:=
E
Out[25]=
E
```

Le tre costanti e, i,  $\pi$  sono legate dalla famosa relazione di Eulero  $e^{-i\pi} = -1$ :

```
In[26]:=
E^(I Pi)
Out[26]=
-1
```

La funzione N[ ] permette di valutare numericamente il primo argomento, il secondo argomento se presente specifica il numero delle cifre richieste

```
In[27]:=
N[Pi]
Out[27]=
3.14159
In[28]:=
N[E]
Out[28]=
2.71828
In[29]:=
N[Pi, 200]
Out[29]=
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592\
307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844\
6095505822317253594081284811174502841027019385211055596446222948\
95493038196
```

```
In[30]:=
Sqrt[Exp[Pi] ArcTan[17] / Cos[2345]]
Out[30]:=
      Pi
Sqrt[E ArcTan[17] Sec[2345]]
In[31]:=
N[%, 40]
Out[31]:=
13.30665891974510430892841114796610728
```

Quasi tutte le funzioni speciali della matematica e della fisica sono presenti, tanto per dare un'idea quello che segue è il dodicesimo polinomio di Chebyshev di prima specie

```
In[32]:=
ChebyshevT[12, x]
Out[32]:=
      2      4      6      8      10      12
1 - 72 x + 840 x - 3584 x + 6912 x - 6144 x + 2048 x
```

Le funzioni Sum e Product permettono di costruire sommatorie e prodotti. Si noti la forma dell'iteratore: {i,0,8} significa «per i che va da 0 a 8».

```
In[33]:=
Sum[x^k/Factorial[k], {k, 0, 8}]
Out[33]:=
      2      3      4      5      6      7      8
x  x  x  x  x  x  x  x
1 + x + --- + --- + --- + --- + --- + --- + ---
      2      6      24      120      720      5040      40320
```

È facile verificare la proprietà fondamentale dei coefficienti binomiali

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Nell'esempio si ha n=5.

```
In[34]:=
n=5;
Sum[Binomial[n, k] a^k b^(n-k), {k, 0, n}]
Out[34]:=
      5      4      3 2      2 3      4      5
a + 5 a b + 10 a b + 10 a b + 5 a b + b
```

Simplify tenta di semplificare le espressioni.

```
In[35]:=
Simplify[%]
Out[35]:=
      5
(a + b)
In[36]:=
Product[(x-1), {i, 1, 5}]
Out[36]:=
(-5 + x) (-4 + x) (-3 + x) (-2 + x) (-1 + x)
```

Expand[] scioglie le parentesi effettuando tutti i prodotti.

```
In[37]:=
Expand[%]
Out[37]:=
      2      3      4      5
-120 + 274 x - 225 x + 85 x - 15 x + x
```

SymbolicSum effettua sommatorie simboliche con indici variabili.

```
In[38]:=
SymbolicSum[i^2, {i, 1, n}]
Out[38]:=
      n (1 + n) (1 + 2 n)
      -----
              6
```

Series calcola sviluppi in serie comprendendo anche l'ordine di grandezza del resto

```
In[39]:=
Series[Exp[x], {x, 0, 8}]
Out[39]:=
      2      3      4      5      6      7      8      9
x  x  x  x  x  x  x  x
1 + x + --- + --- + --- + --- + --- + --- + --- + O[x]
      2      6      24      120      720      5040      40320
```

## Bibliografia

T.W. Gray and J. Glynn, *Exploring Mathematics with Mathematica*, Addison Wesley, 1991.

T.W. Gray and J. Glynn, *The Beginner's Guide to Mathematica*, Addison Wesley, 1992.

A. Kiddle, *Application of Electrical Engineering with Mathematica*, Addison Wesley, 1992.

R. Maeder, *Programming in Mathematica*, Addison Wesley, 1991 (II Edition).

F. Romani, *Mathematica: Un sistema per la Matematica al Calcolatore*, MCmicrocomputer n. 125.

S. Skiena, *Implementing Discrete Mathematics Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Addison Wesley, 1991.

I. Vardi, *Computational Recreations with Mathematica*, Addison Wesley, 1991.

D. Vvedensky, *Partial Differential Equations with Mathematica*, Addison Wesley, 1992.

S. Wolfram, *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison Wesley, 1991 (II Edition).

*The Mathematica Journal*, Rivista trimestrale edita dalla Miller Freeman Inc.

Le serie possono essere invertite simbolicamente. Si può constatare come la serie inversa dell'esponenziale sviluppata in 0 coincide con la serie del logaritmo (la funzione inversa dell'esponenziale) sviluppata in  $e^0 = 1$

almeno 3 coccodrillini in 10 ovetti sapendo che «una sorpresa su 5 sarà uno di noi». In generale, se la probabilità di trovare un coccodrillino in un ovetto è  $p$  quella di non trovarne è  $1-p$ , quella di trovare esattamente  $h$  coccodrillini in  $k$  ovetti è

```
In[40]:=
InverseSeries[*]
Out[40]:=
(-1 + x) -  $\frac{(-1+x)^2}{2}$  +  $\frac{(-1+x)^3}{3}$  -  $\frac{(-1+x)^4}{4}$  +  $\frac{(-1+x)^5}{5}$  -
 $\frac{(-1+x)^6}{6}$  +  $\frac{(-1+x)^7}{7}$  -  $\frac{(-1+x)^8}{8}$  +  $O[-1+x]^9$ 
```

```
In[41]:=
Series[Log[x], {x, 1, 8}]
Out[41]:=
(-1 + x) -  $\frac{(-1+x)^2}{2}$  +  $\frac{(-1+x)^3}{3}$  -  $\frac{(-1+x)^4}{4}$  +  $\frac{(-1+x)^5}{5}$  -
 $\frac{(-1+x)^6}{6}$  +  $\frac{(-1+x)^7}{7}$  -  $\frac{(-1+x)^8}{8}$  +  $O[-1+x]^9$ 
```

Si possono calcolare derivate e integrali indefiniti e definiti

```
In[42]:=
D[Cos[x]/Sin[x+1], x]
Out[42]:=
-(Cos[x] Cot[1 + x] Csc[1 + x]) - Csc[1 + x] Sin[x]
In[43]:=
Integrate[2 x^2, x]
Out[43]:=
 $\frac{2}{3} x^3$ 
```

```
In[44]:=
Integrate[2 x^2, {x, a, b}]
Out[44]:=
 $-\frac{2}{3} a^3 + \frac{2}{3} b^3$ 
```

```
In[45]:=
Integrate[2 x^2, {x, 0, 1}]
Out[45]:=
 $\frac{2}{3}$ 
```

```
In[46]:=
NIntegrate[2 x^2, {x, 0, 1}]
Out[46]:=
0.6666666666666667
```

Per finire con un esempio pratico (si fa per dire!) vediamo di calcolare con *Mathematica* la probabilità di trovare

$$\binom{h,k}{} p^h (1-p)^{k-h},$$

quella di trovarne almeno  $m$  è

$$\sum_{h=m}^k \binom{h,k}{} p^h (1-p)^{k-h},$$

ovviamente deve valere

$$\sum_{h=0}^k \binom{h,k}{} p^h (1-p)^{k-h} = 1$$

che è la probabilità di trovare almeno zero coccodrillini. Verifichiamo dapprima quest'ultima uguaglianza per  $k=10$ .

```
In[47]:=
k=10;
Sum[Binomial[k, h] p^h (1-p)^(k-h), {h, 0, k}]
Out[47]:=
(1-p)^10 + 10(1-p)^9 p + 45(1-p)^8 p^2 + 120(1-p)^7 p^3 +
210(1-p)^6 p^4 + 252(1-p)^5 p^5 + 210(1-p)^4 p^6 +
120(1-p)^3 p^7 + 45(1-p)^2 p^8 + 10(1-p) p^9 + p^10
In[48]:=
Expand[*]
Out[48]:=
1
```

Quindi valutiamo l'espressione richiesta con  $k=10$ ,  $h=3$ ,  $p=1/5$ .

```
In[49]:=
m=3;
p=1/5;
Sum[Binomial[k, h] p^h (1-p)^(k-h), {h, m, k}]
Out[49]:=
 $\frac{3146489}{9765625}$ 
```

*Mathematica* dà il risultato razionale esatto, ma spesso è preferibile un valore decimale approssimato.

```
In[50]:=
N[*]
Out[50]:=
0.3222
```

Appuntamento al prossimo mese.



Francesco Romani è raggiungibile tramite Internet all'indirizzo romani@di.unipi.it

## Stampa a regola d'arte.

Anche se non siete artisti le vostre stampe sono per noi originali degni della massima attenzione.

Per questa ragione, anche nella categoria entry level, dove prevalgono le stampanti realizzate nella massima economia, NEC mira a realizzare prodotti affidabili, applicando la consueta filosofia che la contraddistingue.

Per appurarlo è sufficiente confrontare alcune semplici caratteristiche tecniche come il numero degli aghi, la velocità, le capacità grafiche, la disponibilità di font, la comodità di gestione della carta e l'ampiezza della memoria.

Il vostro lavoro è prezioso, evitate di affidarlo a chi non ha nè arte nè carte in regola.



Listino prezzi 15 gennaio 1993

### Stampanti a 24 aghi

P20	Lit.	599.000
P30	Lit.	790.000
P62	Lit.	1.020.000
P72	Lit.	1.250.000
P90	Lit.	2.000.000

### Stampanti di pagina

S102	Lit.	2.999.000
S62P	Lit.	3.120.000

Colomate		
PS/40	Lit.	10.500.000

Prezzi IVA esclusa - I prezzi possono variare senza preavviso.

NEC Italia S.r.l. Direzione Generale  
V.le L. da Vinci 97, Trezzano S/N (MI)  
Tel. 02/484151, Fax 02/48400875

Filiale di Roma Tel. 06/5920523-4-5, Fax 06/5921043

Filiale di Torino Tel. 011/6604800, Fax 011/6600220

# NEC

Stampanti NEC.  
La qualità rimane impressa.