

# Wolfram Research Mathematica

## Un sistema per la matematica al calcolatore

*Molte delle funzionalità finora ottenibili attraverso l'uso di svariate applicazioni sono ora riunite in un solo prodotto, che non può essere ignorato da chiunque «faccia matematica» al calcolatore. Mathematica è un sistema decisamente impegnativo che offre all'utente possibilità praticamente illimitate. Attualmente disponibile su varie piattaforme hardware (Windows, Mac, Next, Sun, Apollo, ecc.), Mathematica può divenire uno standard di fatto per la ricerca la comunicazione e la didattica in matematica, fisica e ingegneria*

*di Francesco Romani*

*Mathematica* è il potente «sistema per fare matematica al calcolatore» presentato nel 1988 da Stephen Wolfram, un fisico (esperto tra l'altro della teoria dei sistemi complessi) che ha fondato la Wolfram Research per sviluppare e distribuire questo sistema software che racchiude un sistema per la grafica, la statistica, l'elaborazione simbolica, la presentazione multimediale, il calcolo in aritmetica intera e razionale esatta e a precisione illimitata, un linguaggio di programmazione funzionale e procedurale, un word processor ipertestuale, tutto questo integrato in un prodotto che gira indifferentemente sul Mac come sulle workstation e sui mini più potenti.

### Struttura del sistema

*Mathematica* si compone di due moduli principali, il *Front-end* e il *Kernel*. Il *Front-end* implementa l'interfaccia utente e viene fatto girare sulla macchina che l'utente usa direttamente. Il *Kernel* realizza il «motore computazionale» e può essere ospitato dalla stessa macchina del *Front-end* oppure un elaboratore più potente connesso in rete o per via telefonica. Normalmente il *Front-end* riceve uno o più comandi e li passa al *Kernel*. I risultati, in forma interna, vengono visualizzati (o suonati) nei modi previsti dall'interfaccia utente, compatibilmente con l'hardware disponibile.

Recentemente è stato messo a disposizione degli utenti il pacchetto Math-Link che permette di realizzare situazioni più complesse:

- chiamata delle funzioni del *Kernel* dal linguaggio C;
- chiamata di funzioni C da *Mathematica*;
- creazioni di *Front-end* su misura per applicazioni speciali (ad esempio per la didattica di una particolare disciplina può essere fuorviante e pericoloso mettere a disposizione di utenti sprovvisti l'intero insieme delle possibilità di *Mathematica*);
- attivazione e uso concorrente di più *Kernel* su più macchine da parte dello stesso utente.

### Operazioni interattive

L'uso più semplice di *Mathematica* è quello di un poderoso calcolatore interattivo. Il sistema accetta una stringa di ingresso e restituisce una stringa in uscita. Per esempio se scrivo

2+2

e premo ENTER, il sistema risponde

4

ad una richiesta meno banale come

N[Sqrt[Pi]/2],1000]

si ottengono (in meno di 4 secondi su un Macintosh ci) le prime 1000 cifre dello sviluppo decimale esatto di  $\sqrt{\pi/2}$ . Il lettore provi ad immaginare quanto lavoro sarebbe necessario per programmare lo stesso calcolo in C o in Fortran!

Tutte le funzioni speciali più usate nella matematica e nella fisica sono presenti e tutti i calcoli consistenti nella semplice valutazione di formule si possono ottenere con poche righe di codice. Il *modus operandi* ricorda quello del vecchio APL e di altri linguaggi interpretati.

È possibile assegnare i dati intermedi a variabili globali riutilizzabili nel corso della sessione.

La novità di questo sistema rispetto a quelli tradizionali consiste nella eccezionale varietà delle funzioni disponibili e dei tipi di dato utilizzabili: è possibile il calcolo simbolico (derivate, integrali, sviluppi in serie risoluzione di equazioni differenziali ecc.), calcolo numerico in precisione finita, in aritmetica razionale esatta e a precisione illimitata e le varie forme di aritmetica possono essere mescolate anche nella stessa espressione. Anche dati non numerici possono venire agevolmente elaborati.

Ovviamente senza sapere cosa si vuole e senza una padronanza della teoria adeguata agli obiettivi da raggiungere è difficile ottenere risultati significativi da uno strumento tanto potente, ma questa è un'altra storia.

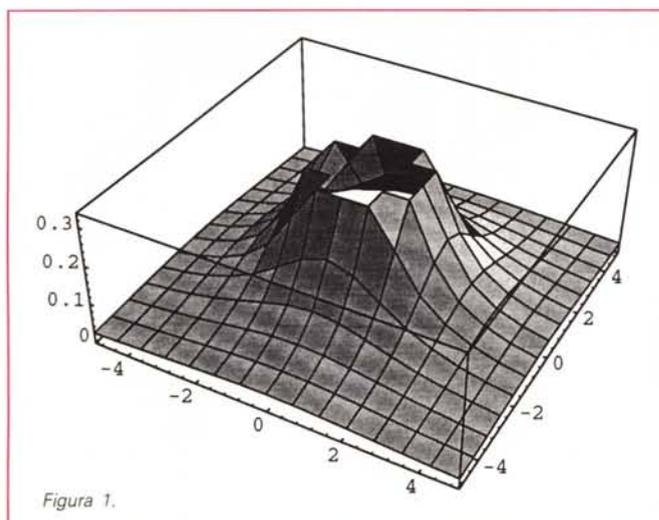


Figura 1.

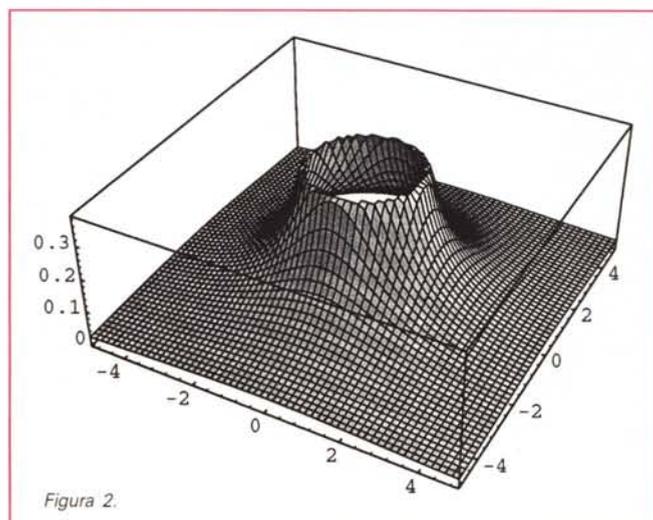


Figura 2.

### Grafica

Uno dei punti di forza di questo sistema è la ricchezza delle potenzialità grafiche. Esistono molte funzioni base per ottenere grafici e figure di ogni tipo anche con possibilità di animazione. I risultati possono essere esportati per

essere rielaborati con programmi di impaginazione, ritocco, registrazione video, sistemi di presentazione, sistemi per la stampa ad alta risoluzione ecc. Anche in questo caso l'hardware impiegato deve essere adeguato alla qualità che si desidera ottenere.

La figura 1 mostra il grafico della

funzione  $z = \sqrt{1+x^2 + y^2}$  ottenuto campionando la funzione in 15x15 punti.

Il campionamento in 60x60 punti fornisce ovviamente risultati più accurati (fig. 2), ma richiede un tempo di elaborazione e uno spazio su disco circa 16 volte maggiori.

## Mathematica con la H

«Fare i conti è un compito degno di uno schiavo, non di un uomo d'ingegno». Così diceva Leibniz, grande matematico e filosofo, oltre tre secoli fa. E poco dopo Pascal, altro grande matematico e filosofo, gli faceva eco coi fatti inventando la prima calcolatrice meccanica. Da allora è stato tutto un susseguirsi di invenzioni che sempre più permettersero di liberare l'uomo dal tedio del calcolo manuale, facendogli così risparmiare tempo e permettendogli di dedicare le sue risorse mentali ad attività più alte e nobili. Il computer, d'altronde, sono nati proprio come evoluzione elettronica delle calcolatrici meccaniche, e come tali sono stati impiegati sin dagli inizi: dapprima con programmi specifici e poi con strumenti sempre più generali e versatili.

I metodi dell'analisi numerica, sviluppati fin dai tempi di Newton per consentire di pervenire in modo rigorosamente controllato a soluzioni approssimate di problemi di calcolo, sono stati presto implementati in programmi di utilità fondamentale in tutte le branche tecniche e applicative della scienza. Ma se il mondo dell'ingegneria è fatto essenzialmente di calcoli numerici, quello della matematica è fatto esclusivamente di calcoli simbolici. Una calcolatrice è poco d'aiuto ad uno studente che deve calcolare un integrale indefinito o a un matematico che deve calcolare una solu-

zione parametrica di un'equazione. In questi casi il computer è sempre stato considerato uno strumento poco utile, in quanto intrinsecamente più adatto a manipolare quantità numeriche che non quantità simboliche.

Solo in tempi relativamente recenti sono stati sviluppati sistemi e linguaggi in grado di effettuare manipolazioni formali di quantità simboliche, che hanno costituito per i matematici un aiuto prezioso quanto il regolo calcolatore per gli ingegneri. Pacchetti come muMath sono ormai una pietra miliare nella storia dei sistemi di calcolo, in quanto hanno permesso alle nuove generazioni di scienziati di effettuare in modo rapido e preciso calcoli che a mano avrebbero richiesto tempi inaccettabili. E con il diffondersi dei personal computer una simile potenza elaborativa è oggi giorno alla portata di tutti.

In questi ultimi quattro anni un pacchetto si è affermato come riferimento nel settore: si tratta di Mathematica, un complesso sistema di analisi numerica e simbolica sviluppato dal fisico americano Stephen Wolfram. Mathematica (con l'acca) è un poderoso ausilio a tutti coloro che fanno matematica (senz'acca) a qualsiasi livello, in quanto consente di fare calcoli simbolici, calcoli numerici, di disegnare funzioni in due o tre dimensioni e tantissime altre

cose ancora. Si tratta in effetti di un pacchetto mastodontico, che richiede un hardware abbastanza sostanzioso su cui girare e necessità di un cospicuo periodo di apprendimento per poter essere usato a fondo. Di contro è ormai lo standard mondiale, è diffuso praticamente in tutte le Università, può essere usato abbastanza immediatamente nel suo modo interattivo ed è disponibile per tutte le piattaforme più significative, dal PC al Macintosh, dalla Sun al NeXT.

Bene. Da questo mese su MCmicrocomputer si apre un nuovo spazio dedicato istituzionalmente a **Mathematica**. Immaginiamo che sarà benvenuto soprattutto da parte della (nutrita) comunità di studenti universitari che ci leggono, ma crediamo che possa essere utile a tutti quanti come argomento di cultura informatica generale, anche se il costo del pacchetto lo pone in effetti fuori della portata dell'utente casuale.

In ogni caso la rubrica non sarà un «corso di Mathematica» (per quello ci sono già i manuali), ma piuttosto uno spazio sul quale verranno illustrate particolari applicazioni del pacchetto, «trucchi» sul suo uso, novità di rilievo e quant'altro utile per un suo utilizzo serio e completo. Come al solito, critiche e suggerimenti sul contenuto della rubrica sono bene accetti.

Corrado Giustozzi

### Programmazione

Vediamo qualche esempio delle possibilità offerte dal linguaggio nei vari stili di programmazione.

**Programmazione procedurale:** è la più lontana dallo spirito del linguaggio ma la più facilmente accessibile a che proviene dai linguaggi tradizionali. Per esempio il modulo seguente realizza il calcolo iterativo del massimo comun divisore:

```
MCD[m0_, n0_] := Module[{r=Mod[m0, n0], m=m0, n=n0},
  While[r>0,
    m = n;
    n = r;
    r = Mod[m, n]];
n];
```

```
MCD[12, 15]
```

Programmazione funzionale. In *Mathematica* si può facilmente programmare come nei linguaggi funzionali puri (come il Lisp). La quantità di funzioni disponibili facilita la scrittura di soluzioni compatte, anche se la possibilità di risolvere in molti modi diversi lo stesso problema crea grandi imbarazzi all'utente meno smaliziato. La funzione seguente calcola ricorsivamente il massimo comun divisore:

```
MCD[m_, n_] := If[r=Mod[m, n] == 0, n, MCD[n, r]];
```

```
MCD[12, 15]
```

Programmazione mediante regole di riscrittura. Internamente *Mathematica* è basato su un insieme di regole di riscrittura e anche l'utente può usare questo potentissimo metodo di programmazione. Si consideri per esempio uno scheletro (incompleto) di programma per la derivazione simbolica:

```
Der[x_ y_, t_] := x Der[y, t] + y Der[x, t];
Der[x_ + y_, t_] := Der[x, t] + Der[y, t];
Der[x_^y_, t_] := y x^(y-1);
Der[x_, t_] := 0 /; FreeQ[x, t];
Der[x_, x_] := 1;
```

Prendiamo un polinomio di quarto grado

```
pol=Expand[(x-4)^5]
```

$$-1024 + 1280 x - 640 x^2 + 160 x^3 - 20 x^4 + x^5$$

Il programma di cui sopra ne calcola la derivata simbolica.

```
Der[pol]
```

$$1280 - 1280 x + 480 x^2 - 80 x^3 + 5 x^4$$

### Presentazione multimediale

Il *Front-End* di *Mathematica*, sviluppato inizialmente solo per il Mac, e ora presente in altre applicazioni, è un ottimo esempio di interazione complessa tra macchina e utente. Il *Front-End* tratta documenti, detti *notebook*, composti di celle. Internamente il *notebook* è un file di tipo ASCII ma nella versione formattata vista dall'utente ogni cella può contenere testo o grafica o suoni. Le celle di tipo testo possono essere di attive (codice eseguibile) o inattive (commenti e risultati) le celle possono essere raggruppate in gruppi che a loro volta possono essere raggruppati realizzando una struttura ad albero. Si immagini un libro il cui contenuto può essere esplorato cliccando sulle righe dell'indice.

### Principali aree di applicazione

Chi sono gli utenti potenziali di *Mathematica*? Per cominciare tutti coloro che devono eseguire calcoli numerici più o meno complicati (matematici, fisici, ingegneri, chimici, statistici, economisti, ecc.). Non dimentichiamo che Wolfram è un fisico e nel progettare il linguaggio ha pensato innanzi tutto alle esigenze di fisici e ingegneri. Per il matematico l'uso di un sistema di questo tipo permette di investigare sistemi matematici complessi con maggiori profondità di esplorazione e a volte si aprono possibilità nuove. Per esempio nel campo della approssimazione asintotica di funzioni, certi calcoli banali, ma di grande lunghezza e tediosità, possono ora essere impostati facilmente e risolti dalla macchina. Spesso però i professionisti (accademici e non) hanno poco tempo a disposizione e un campo di interesse abbastanza limitato e quindi sfruttano solo una minima parte delle possibili

ità del sistema. Gli studenti, invece, hanno gli interessi più disparati e maggiori occasioni di utilizzare un sistema come questo. Nel confrontare *Mathematica* con altri sistemi di calcolo simbolico o matematico bisogna tenere presente che *Mathematica* è, prima di ogni altra cosa, un linguaggio di programmazione interattivo che viene fornito insieme ad una enorme quantità di software applicativo. È probabile che in molti singoli campi specifici (ad esempio algebra dei polinomi o elaborazioni con matrici) esistano specifici pacchetti software (basati magari sul LISP o sul Fortran) che risultano più efficienti. Non è difficile inoltre, per gli specialisti, escogitare algoritmi che risolvono problemi particolari più rapidamente degli algoritmi interni di *Mathematica*, nulla vieta però di inserire tali algoritmi nel sistema o sotto forma di pacchetto aggiuntivo o, interagendo con gli sviluppatori, direttamente nel *Kernel* del sistema.

### Difetti e inconvenienti

Sarebbe difficile e poco credibile, anche da parte di un utente entusiasta come il sottoscritto, poter affermare che *Mathematica* è un prodotto perfetto. È abbastanza evidente che un programma di un milione di linee di codice non può essere privo di bachi e, soprattutto, l'uso di *Mathematica* mette a dura prova le possibilità dei sistemi operativi meno robusti (a detta di Wolfram *Mathematica* è il più grosso programma che gira su Windows e con ciò spiega i numerosi problemi riscontrati da utenti e sviluppatori).

A parte il rischio frequente di imbattersi in errori di sistema, gli inconvenienti più comuni sono dovuti alle terribili sete di memoria. Sul Mac *Mathematica* richiede circa 4 Mbyte per fare 2 + 2, per girare appena decentemente con problemi piccoli sono utili 5-6 Mbyte, un uso professionale può essere affrontato con una partizione di almeno

### I prezzi e le versioni disponibili

*Mathematica* è distribuito dalla AIS, Via Rombon 11 Milano, Tel. 02-2640107 Fax 02-26410744, ed è disponibile anche presso numerosi rivenditori locali. I prezzi di listino per Mac e PC-compatibili, IVA esclusa, sono i seguenti:

Descrizione	Industrie	Università e Scuole
Front End (Macintosh)	650.000	500.000
Standard (Macintosh, DOS, Windows)	1.650.000	1.350.000
Enhanced (Macintosh, DOS)	2.450.000	2.000.000
Enhanced Windows	2.750.000	2.200.000
Edizione Studenti (Mac, DOS, Windows)	—	390.000

## Rotterdam 1992, la prima conferenza europea di Mathematica

Si è svolta a Rotterdam dal 2 al 4 settembre la prima conferenza europea di *Mathematica*; è stata un'occasione per incontrare il presidente e i principali responsabili tecnici della Wolfram Research, Inc. Una nutrita serie di corsi a tutti i livelli e le relazioni degli utenti europei hanno permesso di fare il punto sullo stato del prodotto. Insieme ai responsabili della casa produttrice e ai distributori europei; erano presenti anche rappresentanti della Next Computer Inc. della Addison Wesley Publishing e altri operatori interessati. Lo scopo della conferenza era quello di fornire agli utenti, insieme ad una panoramica delle prospettive di sviluppo di *Mathematica*, un insieme di corsi (della durata da una a tre ore e a livello introduttivo, intermedio e avanzato) sui principali aspetti pratici e teorici del sistema.

Stephen Wolfram, nella conferenza introduttiva, ha presentato la versione attuale 2.1. Successivamente il presidente della Wolfram Research ha annunciato alcune delle linee di sviluppo del sistema: si prevede, tra l'altro, l'introduzione di elaborazioni *real time*, il potenziamento del compilatore, delle possibilità di *word processing* e composizione matematica. Provocatoria è stata la promessa di migliorare le possibilità del pacchetto di integrazione simbolica fino a superare le capacità dei migliori esperti umani. La cosa è meno assurda di

quanto potrebbe sembrare a prima vista: è di poco tempo fa la notizia che un computer ha battuto per la prima volta un Grande Maestro di scacchi, se è vero che l'integrazione simbolica è certamente una attività di alto livello intellettuale è comunque certamente più facile divenire un buon matematico che un Grande Maestro.

Altre conferenze di carattere generale hanno trattato applicazioni di *Mathematica* a problemi di matematica, fisica e ingegneria sia per quanto riguarda gli aspetti di ricerca che quelli didattici (interessante la conferenza del Prof. Berry sui metodi asintotici, ovvero, come era scritto su un muro a Princeton,  $2+2=5$  per 2 sufficientemente grande).

I corsi hanno trattato ai vari livelli gli aspetti della programmazione in *Mathematica*, della grafica, del trattamento dei dati numerici, del *linking* con programmi esterni. Vorrei segnalare un grazioso esempio presentato da Roman Maeder nel corso di programmazione avanzata: l'implementazione della funzione fattoriale come punto fisso di una trasformazione funzionale. Questo tipo di applicazioni pone *Mathematica* tra i possibili linguaggi per la didattica e la sperimentazione in informatica teorica.

Infine le oltre quaranta *short-talks* (di 45 minuti) hanno presentato un vasto panorama delle applicazioni possibili con questo potente strumento software.

8-10 Mbyte. Sulle macchine Unix la memoria virtuale crea meno problemi, comunque, data la probabile presenza di altri utenti, è preferibile avere almeno 16 Mbyte di RAM.

Poiché l'appetito vien mangiando, il

secondo problema tipico è la velocità di elaborazione. Dopo aver risolto elegantemente i propri problemi su piccoli esempi campione, risulta naturale tentare di affinare sempre più i risultati e affrontare problemi sempre più grossi.

### Bibliografia

T.W. Gray and J. Glynn. **Exploring Mathematics with Mathematica**. Addison Wesley, 1991.

L'intero libro, sotto forma di notebook di Mathematica (consultabili anche senza possedere l'applicazione) è riprodotto anche in un CD-ROM multicompatibile compreso nel prezzo.

T.W. Gray and J. Glynn. **The Beginner's Guide to Mathematica**. Addison Wesley, 1992.

A. Kiddle. **Application of Electrical Engineering with Mathematica**. Addison Wesley, 1992.

R. Maeder. **Programming in Mathematica**. Addison Wesley, 1991 (II Edition).

S. Skiena. **Implementing Discrete Mathematics Combinatorics and Graph Theory with Mathematica**. Addison Wesley, 1991.

I. Vardi. **Computational Recreations with Mathematica**. Addison Wesley, 1991.

D. Vvedensky. **Partial Differential Equations with Mathematica**. Addison Wesley, 1992.

S. Wolfram. **Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer**. Addison Wesley, 1991 (II Edition).

**The Mathematica Journal**. Rivista trimestrale edita dalla Miller Freeman Inc.

Se l'utente non ha una sia pure rudimentale conoscenza della teoria della complessità computazionale egli commette facilmente l'errore di mandare in esecuzione problemi che richiederebbero miliardi di anni di elaborazione. Restando nel campo dei problemi affrontabili, la velocità di elaborazione non guasta mai, e, nella famiglia Mac la piattaforma di partenza per un lavoro serio è un LCII o un glorioso SE30 (con almeno 8 Megabyte di memoria).

La terza risorsa di cui *Mathematica* è affamata è la preparazione dell'utente. Questa può sembrare una affermazione ridicola (di solito sono gli utenti che pretendono di lavorare con programmi furbi), ma bisogna prendere in considerazione due aspetti:

— *Mathematica* serve per fare matematica, «pura» o applicata a varie altre discipline, il programma è uno strumento e, come un *word-processor* aumenta a dismisura le possibilità tipografiche dello scrittore, così *Mathematica* accresce le possibilità di speculazione matematica di un ordine di grandezza, è chiaro però che nessun *word-processor* potrà far scrivere bene chi è privo di idee.

— Come per tutti i linguaggi di programmazione l'utente ha bisogno di un adeguato periodo di allenamento prima di divenire produttivo, con *Mathematica* questa fase è più impegnativa data la complessità e la ricchezza del linguaggio.

Infine veniamo al prezzo: *Mathematica* per Mac, nella versione che usa il coprocessore, costa circa due milioni, una cosa assurda per chi paga di tasca propria e non sa cosa farsene (di *Mathematica* non dei milioni!), ma la versione per studenti costa meno di un quarto e se si pensa che per due milioni si acquistano 3 linguaggi di programmazione, un programma di grafica programmabile, un biblioteca di funzioni matematiche, statistiche e di calcolo simbolico, un word processor rudimentale, ma interattivo, con in più il suono e le animazioni, il tutto integrato in un sistema coerente che può accrescere di un ordine di grandezza la produttività individuale, si vede che in realtà l'oggetto è quasi regalato. Il vero problema per il professionista è il dover mettere in bilancio un upgrade dei propri mezzi di calcolo e, soprattutto, un lungo periodo di acclimatamento che certamente rappresenta la voce più costosa. MS

Francesco Romani è raggiungibile tramite Internet all'indirizzo romani@di.unipi.it.