



# software

## Apple

a cura di Valter Di Dio

### Seconda parte

## Precisione Multipla per Applesoft

di Stefano Laporta - Bologna

### La soluzione

La soluzione finale di tutti i problemi che affliggono le routine matematiche dell'Applesoft potrebbe essere il riscrivere o modificare queste routine, ma questo non è certo una cosa semplice.

Questa idea ha continuato a «ronzarmi» in testa finché qualche tempo fa mi è capitato di leggere un articolo sul numero 190 della rivista Le Scienze, nella rubrica Ricreazioni al Calcolatore, in cui si parlava di aritmetica ad alta precisione.

Mi ha colpito il fatto che l'unico programma citato, in grado di trattare aritmetica ad alta precisione su di un personal computer, fosse un pacchetto di subroutine in linguaggio macchina realizzato proprio per il microprocessore 6502, in grado di raggiungere una precisione massima di oltre 600 cifre.

Mi è venuto spontaneo pensare al mio povero Applesoft ed alla sua precisione di 9 cifre ed ho avuto una gran voglia di possedere quel pacchetto di subroutine.

In seguito però sono giunto alla conclusione che un programma del genere, per quanto di caratteristiche notevoli (ammesso di riuscire a reperirlo in Italia) non sarebbe di uso molto pratico.

Infatti per adattare programmi Basic già esistenti al funzionamento in precisione multipla con queste subroutine sarebbe necessario un lungo e paziente lavoro, dato che ogni operazione matematica dovrebbe essere effettuata richiamando le opportune subroutine; se il programma fosse molto complesso il lavoro di adattamento necessario potrebbe essere veramente enorme.

Mi è venuta così l'idea di realizzare indipendentemente un mio pacchetto di subroutine con lo scopo di integrarlo all'interno dell'interprete Applesoft in maniera tale da rendere trasparente all'utente la presenza o meno del pacchetto ad alta precisione e riducendo praticamente a zero le modifiche da apportare ai programmi da eseguire. Sono così nati i programmi «AP2» e «Mulprec».

Naturalmente un programma così non si realizza da mattina a sera ed è stata necessaria una accurata progettazione iniziale per rendere realizzabile il lavoro.

Si è trattato infatti di riscrivere la parte dell'Applesoft che si occupa dei calcoli matematici (circa il 30-40% dell'interprete) in maniera da eseguire ogni funzione matematica con una precisione anche superiore al centinaio di cifre, per di più in maniera da non far notare alcuna differenza all'utente finale.

E questo non è certo uno scherzo, se si pensa che la maggior parte degli algoritmi utilizzati sui computer sono orientati a calcoli con precisioni FISSE di 10-20 cifre, non certo a precisioni variabili, e che si lavora con un "povero" micro ad 8 bit.

Comunque i possessori di computer con velocissimi coprocessori matematici a 16/32 bit non cantino vittoria.

Quando si richiedono risultati con precisione superiore a quella massima disponibile via hardware mediante il coprocessore (generalmente 64 bit di mantissa corrispondenti a circa 18 cifre significative) l'unica strada disponibile è la simulazione software che fa alzare vertiginosamente i tempi di esecuzione.

In ogni caso credo che il risultato ottenuto valga lo sforzo necessario.

Usando il programma si possono ottenere risultati con precisione pari o superiore a quella di calcolatori mainframe (ma non alla stessa velocità...), per di più senza praticamente fare alcuna modifica al programma originario, dato che tutte le istruzioni Basic sono state adattate comprese DEF FN, IF-THEN, cicli FOR-NEXT, variabili intere, logiche, con indici, funzioni stringa, ecc. ecc..

### Caratteristiche del programma

Il programma Mulprec permette di aumentare la precisione delle variabili Applesoft a piacere sino ad un limite di 245 cifre significative, con un esponente variabile fra -9860 e 9860 qualunque sia la lunghezza della mantissa, ed è funzionante con ogni istruzione Applesoft, in particolare con le funzioni matematiche che sono state riscritte appositamente per dare risultati il più possibile accurati.

Il programma può funzionare con Apple II GS/C/E e con Europlus con Language Card, sotto il sistema operativo DOS 3.3.

Vediamo le caratteristiche tecniche più in dettaglio:

*Aritmetica binaria.*

*Mantissa delle variabili reali: da 3 a 102 byte.*

*Esponente: 2 byte.*

*Range numerico da 8E-9865 a 4E+9863.*

*Fino a 26 livelli di parentesi o di operazioni in sospenso.*

*Segnalazioni di errore standard Applesoft.*

*Funzione SQR calcolata mediante algoritmo di Newton.*

*Potenze con esponente intero minore di 32768 calcolate con moltiplicazioni.*

*Funzione RND calcolata con algoritmo di congruenza lineare con aritmetica interna.*

Ogni altra funzione trascendente viene calcolata mediante particolari serie di Taylor con convergenza accelerata, particolarmente accurate in corrispondenza dei valori critici 0, 1, pigreco, ecc..

Ogni istruzione Basic è resa pienamente compatibile con l'aritmetica ad alta precisione.

### Struttura del programma

Il programma «Mulprec» è stato scritto completamente in linguaggio macchina.

È divisibile sostanzialmente in tre blocchi:

un modulo base che effettua in precisione multipla le 4 operazioni e le altre funzioni matematiche del Basic;

una interfaccia che collega i programmi del modulo base con la parte invariata dell'Applesoft in maniera da rendere per l'utente il funzionamento del Basic del tutto identico a quello solito; per far questo l'interfaccia si collega all'Applesoft in più di 70 punti differenti (una specie di polipo...);

un programma di installazione che riloca i moduli precedenti al loro posto.

Dopo l'installazione il modulo base occupa la zona di memoria \$800-\$1DFF, mentre la restante parte del programma occupa la zona \$D000-\$F7FF della Language Card insieme alle parti non modificate dell'Applesoft.

### Uso del programma

Per utilizzare questo programma si può procedere in due modi:

- 1) richiamare il programma Basic

### Per chi vuole il listato

Il listato principale di questo programma è molto lungo. In conseguenza di ciò, si è ritenuto opportuno non pubblicarlo, sia perché avrebbe occupato troppo spazio sulla rivista sottraendone ad altri argomenti, sia perché una digitazione senza errori di un listato così lungo appare poco probabile. Chi è interessato al programma può ordinare secondo il solito sistema, il disco in redazione.

Questo programma è disponibile su disco presso la redazione. Vedere l'elenco dei programmi disponibili e le istruzioni per l'acquisto a pag. 227.



Si può anche scrivere un programmino, per esempio per calcolare il fattoriale di 3000:

```
10 A=1
20 FOR I=1 TO 3000
30 A=A*I
40 NEXT
50 PRINT A
```

Che dà

```
4.149359603437854085556867093099E+91-30
```

Come si vede, i valori sono stampati con 31 cifre significative di precisione.

Si potrebbero fare altri esempi più complessi, ma credo che la maniera più semplice di rendersi conto di cosa fa il programma sia di prendere un vecchio e ben conosciuto programma che effettui un bel po' di calcoli (tipo risoluzione equazioni, integrali...) e vedere che miglioramento riesce a dare Mulprec sui risultati.

Oppure si può impostare la massima precisione (N=245) e con qualche linea programma si possono calcolare elementi di successioni come i numeri di Fibonacci, Lucas, Bell, Catalani sino alla massima precisione possibile.

### Tempi di esecuzione

Simulando con Mulprec la precisione Applesoft (9 cifre significative) si ottengono tempi di esecuzione più alti di un buon 100%.

Questo è dovuto al fatto che i loop che effettuano le operazioni fondamentali (byte per byte) di Mulprec sono circa il doppio più lenti di quelli dell'Applesoft.

Infatti nell'Applesoft i registri di calcolo sono piccoli e di lunghezza fissa, per cui è stato possibile scrivere i loop per esteso e per di più usare solo registri in pagina zero, guadagnando notevolmente in velocità.

Al contrario, tutto questo è impossibile in Mulprec, dato che i registri di calcolo hanno lunghezza variabile e sono così lunghi da non poter risiedere in pagina zero.

È importante notare che, aumentando il numero N delle cifre coinvolte nei calcoli, i tempi di esecuzione delle varie routine aumentano in maniera assai differente: per la somma e la sottrazione aumentano proporzionalmente ad N, per la moltiplicazione e la divisione proporzionalmente ad N<sup>2</sup>, per le funzioni trascendenti all'incirca proporzionalmente ad N<sup>3</sup>.

Un esempio: per calcolare un seno in media sono necessari 0.5 secondi operando con numeri di 24 cifre, 20 secondi con 90 cifre e 5 minuti con la precisione massima di 245 cifre, contro i 3 centesimi di secondo dell'Applesoft a 9 cifre (bisogna accontentarsi .....).

### Note importanti

In generale qualunque programma Applesoft può essere eseguito in precisione multipla, però è necessario fare alcune annotazioni:

1) bisogna controllare meticolosamente se il programma usa istruzioni grafiche;

in caso di incertezza rispondere SI ad entrambe le domande del programma BOOT.

2) Se il programma Basic carica nel corso del programma altri programmi in linguaggio macchina bisogna controllare che nessuno di questi si sovrapponga in tutto o in parte all'area di memoria \$800-\$1DFF o utilizzi la RAM della Language Card perché sono aree riservate al funzionamento del programma.

3) A causa del maggior numero di cifre stampate, le tabulazioni usate per le stampe possono risultare errate.

4) Le variabili in precisione multipla occupano molta più memoria del normale quindi occorre fare attenzione al dimensionamento di matrici e vettori per evitare OUT OF MEMORY ERROR.

5) Il programma non può operare con programmi compilati.

Questa però non è una limitazione significativa: infatti, man mano che aumenta il numero di cifre coinvolte nei calcoli, aumenta il tempo di esecuzione dei calcoli elementari rispetto a quello delle altre istruzioni e di conseguenza diminuisce il vantaggio dell'uso di programmi compilati.

Per quanto i programmi compilati siano

completamente in linguaggio macchina devono obbligatoriamente utilizzare per i calcoli fondamentali le stesse routine che usa l'interprete (salvo qualche eccezione) e se queste routine sono lente non possono certo velocizzarle.

6) La precisione massima raggiunta dal mio programma è di solo (!) 245 cifre significative contro le 600 del pacchetto di programmi d'oltreoceano.

Questa limitazione è dovuta al fatto che l'Applesoft per poter stampare un numero costruisce una stringa alfanumerica contenente il numero stesso; dato che le stringhe non possono essere più lunghe di 255 caratteri, neppure il numero da stampare può esserlo, a meno di non riscrivere anche la parte dell'Applesoft che gestisce le stringhe (ma allora si farebbe prima a riscrivere tutto l'Applesoft.....).

### Formattazione di stampa

Il programma è predisposto per stampare i numeri secondo lo standard Applesoft; in particolare i numeri minori di 0.01 o maggiori di 999999999 vengono stampati in notazione esponenziale, così come nell'Applesoft. Nel caso in cui si voglia disabilitare

#### Boot

```
1 F$ = "MULPREC"
5 L = LOG (256) / LOG (10)
10 HOME : FLASH : PRINT "ROUTINE MATEMATICHE IN": PRINT "PRECISIONE MULTIPLA " : NORMAL : PRINT : PRINT "1987-Stefano Laporta": PRINT : PRINT "Vuoi le istruzioni (S/N)?"
12 GET A$: IF A$ < > "S" AND A$ < > "N" THEN 12
15 IF A$ = "N" THEN 10000
20 VTAB 4: PRINT "Questo programma permette di aumentare": PRINT "la precisione delle routine matematiche dell'interprete APPLSOFT sino ad un " : PRINT "limite di " : INVERSE : PRINT "245 CIFRE SIGNIFICATIVE": NORMAL
30 PRINT "di mantissa e con un esponente variabile fra " : INVERSE : PRINT "-9800 E 9800.": PRINT : NORMAL
40 PRINT : PRINT : PRINT "Il programma supporta l'intero set di " : PRINT "istruzioni dell'APPLESOFT ed e'": PRINT "utilizza bile con la maggior parte del": PRINT "software APPLE.": VTAB 15:
50 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: HOME
60 INVERSE : PRINT "ISTRUZIONI PER L'USO " : NORMAL : POKE 34,2
70 VTAB 4: PRINT "Il programma funziona con il DOS 3.3 su": PRINT "APPLE II/gs/c/e.": PRINT : PRINT "Su APPLE II/II PLUS e' necessaria la presenza della LANGUAGE CARD."
80 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: HOME
90 VTAB 4: PRINT "Il programma sostituisce alle routine": PRINT "matematiche dell'interprete APPLESOFT unaltro insieme di routines che garanti-": PRINT "scono la precisione desiderata su tutte le funzioni del BASIC."
100 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: HOME
110 VTAB 4: PRINT "Queste routines occupano la zona di memoria $800-$1DFF lasciando disponibile al programma BASIC la RAM da $1E00 in poi.": PRINT
120 PRINT "Se il programma BASIC fa uso delle istruzioni HGR o HGR2 e' consigliabile indi-": PRINT "carlo prima di installare le routines": PRINT "per evitare interferenze fra programma epagine grafiche.": PRINT
130 PRINT "Oppure prima di caricare il programma": PRINT "BASIC bisogna digitare la seguente linea": INVERSE : PRINT "POKE 104,96:POKE24576,0:NEW": PRINT : NORMAL : PRINT "E poi caricare il programma."
140 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: HOME
150 VTAB 4: PRINT "Le routines possono essere installate tramite questo programma oppure chiamatedirettamente": PRINT
160 INVERSE : PRINT "POKE 236,N": PRINT "POKE 237,LOMEM": PRINT "PRINT CHR$(4)'BRUN'F$": NORMAL : PRINT
170 PRINT "DOVE": PRINT "N e' la lunghezza della mantissa in bytes (3<=N<=102)": PRINT "LOMEM e' il byte alto del puntatore che indica l'inizio dell'area destinata al BASIC e vale": PRINT "30 normalmente": PRINT "64 se il programma usa HGR": PRINT "96 se il programma usa HGR2"
180 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: HOME
190 VTAB 4: PRINT "La lunghezza L della mantissa puo' variare da 7 a 245 cifre DECIMALI significative, ma non tutti i valori compresi in questo intervallo sono permessi.": PRINT
192 PRINT "Sono possibili solo i valori dati dalla formula": INVERSE : PRINT "L=INT(N*2.40824)": NORMAL : PRINT "ove N e' la lunghezza in BYTES e varia fra 3 e 102.": PRINT
```

la stampante in notazione esponenziale per numeri maggiori di  $1E+9$  (p.es. utile in calcoli finanziari) si può usare l'istruzione:

POKE 2051,N

che va eseguita dopo aver installato il programma, ove "N" è l'esponente a partire dal quale i numeri vengono stampati in notazione esponenziale.

In tal modo verranno stampati in notazione esponenziale solo i numeri maggiori di  $10^{-N}$ .

Attenzione: N non può essere maggiore del numero NC di cifre significative; infatti i numeri maggiori (in valore assoluto) di  $10^{-NC}$  vengono sempre visualizzati in notazione esponenziale.

Se si vuole stampare ogni numero in notazione esponenziale bisogna usare

POKE 2051,0.

Esempio:

Installiamo Mulprec con 19 cifre significative:

PRINT 10<sup>-13</sup> dà 1E+13, ma con POKE 2051,15 darà 10000000000000;

PRINT 3/4 dà .75, con POKE 2051,15 dà 7.5E-01.

### L'AP2

Come tutti i programmi molto complessi, anche Mulprec è stato preceduto da alcuni piccoli programmi utilizzati per lo studio di alcuni aspetti del problema da affrontare.

Uno di questi, che ho chiamato AP2, ha delle caratteristiche veramente notevoli.

La sua funzione è quella di migliorare l'accuratezza e la velocità del calcolo di alcune funzioni matematiche ed eliminare alcuni piccoli bug matematici dell'Applesoft molto fastidiosi.

Infatti: la funzione SQR viene calcolata usando finalmente l'algoritmo di Newton (e non elevando alla 0.5 come nell'Applesoft) con un incremento in velocità di un fattore 3 e con una maggiore precisione nei risultati (specie nelle famigerate radici di quadrati perfetti). La funzione RND viene eseguita con l'algoritmo di congruenza lineare che, usando aritmetica intera, gira a velocità doppia rispetto all'originale, e dà la sicurezza matematica di non entrare mai in loop.

Le potenze intere con esponente minore di 32 vengono calcolate mediante moltiplicazioni invece che con i logaritmi, con notevole aumento di precisione.

Tutte le funzioni presentano aumenti in velocità e precisione più contenuti ma pur sempre apprezzabili.

Riguardo ai bug matematici credo che la maniera migliore per rendersi conto delle caratteristiche del programma sia lanciare il programma Basic "Bugs Applesoft" (che ho creato appositamente per provare AP2) rispettivamente prima e dopo aver installato AP2.

(Dopo aver visto quante corbellerie fa la matematica Apple credo nasca spontaneamente un grande desiderio di linciare colui che ha scritto l'Applesoft .... o almeno mandarlo a ripetizione di analisi!).

### Come si usa

Il programma è scritto completamente in linguaggio macchina ed occupa meno di 2K (prima dell'installazione \$6D00-\$7500).

L'uso è molto semplice, infatti basta lanciarlo con BRUN AP2.

Il programma effettuerà una copia dell'Applesoft nella Language Card e si installerà esclusivamente nel banco secondario da 4K presente in questa;

l'installazione di AP2 è contraddistinta dal cambio del prompt da ] a [ (da è a. nei nuovi).

Dato che le modifiche alle routine matematiche sono interne agli entry point normalmente usati dai compilatori, il programma funziona correttamente con programmi compilati e non (io l'ho provato con i compilatori TASC e SPEEDSTAR senza avere alcun problema).

Naturalmente dato che usa la Language Card, non può funzionare con sistemi operativi che usino questa scheda, tipo PRO-DOS o DOS relocati.

Secondo me è così utile, piccolo e poco fastidioso che si può tranquillamente sempre farlo caricare dal programma HELLO: almeno si avrà la certezza che se il computer dà risultati errati la colpa non è del povero Applesoft ma proprio del programma! (o meglio, del programmatore....).

MC

```

195 PRINT "Questo programma suggerisce i valori": PRINT "permes
si piu' vicini al valore desiderato": PRINT "Alcuni valori p
ermessi: ": PRINT "L= 7,": FLASH : PRINT "9": NORMAL : PRINT
",12,14.. corrispondenti a N=3,4,5,6..": PRINT "L=": FLASH
: PRINT "9": NORMAL : PRINT " corrisponde alla precisione
standarddell'APPLESOFT"
200 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: HOME
210 VTAB 4: PRINT "Le variabili ad alta precisione": PRINT "occ
upano piu' spazio in memoria del": PRINT "normale; occorre
quindi fare attenzione": PRINT "ai dimensionamenti di vettor
i e matrici": PRINT "per evitare OUT OF MEMORY ERROR."
220 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: HOME
230 VTAB 4: PRINT "Questo programma non supporta l'uso": PRINT
"di compilatori.": PRINT "Quindi l' esecuzione corretta di
programmi compilati non e' garantita."
240 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: POKE 34,0: HOME
250 INVERSE : PRINT "CARATTERISTICHE TECNICHE": NORMAL : POKE 3
4,1: HOME
260 VTAB 3: PRINT "Aritmetica binaria.": PRINT : PRINT "Lunghes
za della mantissa delle variabilireali da 3 a 102 bytes.": PRINT
: PRINT "Range numerico da 8E-9865 a 7E+9863.": PRINT
270 PRINT "Formato di PRINT standard APPLESOFT.": PRINT : PRINT
"Compatibilita' completa con tutte le istruzioni BASIC.": PRINT
: PRINT "Funzioni trascendenti accurate in vicini a di v
alori critici (es. 0,1,pi).": PRINT :
280 PRINT "Radici quadrate di quadrati perfetti": PRINT "e pote
nze di numeri interi sono": PRINT "calcolate esattamente."
900 VTAB 24: PRINT "(premere RETURN)": GET A$: POKE 34,0: HOME
10000 PRINT : PRINT "-----":
PRINT "Inserire il numero di cifre": PRINT "significative
della mantissa": PRINT "(compreso fra 7 e 245) : ": INPUT
"";D
10030 IF D < 7 OR D > 245 THEN PRINT : PRINT "Non e' valido.":
PRINT : GOTO 10000
10040 N = INT (D / L) + 1:D2 = INT (N * L):D0 = INT ((N - 1) *
L): IF D < > D2 THEN PRINT : PRINT "Non e' permesso.": PRINT
: PRINT "I valori piu' vicini sono "D0", "D2": PRINT : GOTO
10000
10050 PRINT "D.k.": PRINT
10060 INPUT "Il programma BASIC usa HGR ? (SI/NO) ":H1$:H1$ = LEFT$
(H1$,1): IF H1$ < > "S" AND H1$ < > "N" THEN 10060
10070 PRINT : INPUT "Il programma BASIC usa HGR2? (SI/NO) ":H2$
:H2$ = LEFT$ (H2$,1): IF H2$ < > "S" AND H2$ < > "N" THEN
10070
10080 LM = 30: IF H1$ = "S" THEN LM = 64
10090 IF H2$ = "S" THEN LM = 96
10100 PRINT SPC(240)
10110 INPUT "dati corretti? (S/N) ":A$:A$ = LEFT$ (A$,1): IF A
$ < > "S" AND A$ < > "N" THEN 10110
10120 HOME : IF A$ = "N" THEN 10000
20000 POKE 236,N: POKE 237,LM: PRINT CHR$(4)"BRUN "F$
20010 REM :N=numero di bytes mantissa, 3<=N<=102
20011 REM :LM=byte alto di LOMEM, LM>=30

```

### Bibliografia

- Gruenberger F.**  
«Come e perché trattare numeri con migliaia di cifre»  
in Le Scienze 190, pagg. 120-125.
- Stoer J.**  
«Introduzione all'analisi numerica»  
Zanichelli, 1979
- Brasca L.**  
«Tavole matematiche»  
Ghisetti e Corvi, 1980
- Hastings C.**  
«Approximations for digital computers»  
Princeton Univ. Press, 1955
- AA.VV.**  
«Algorithms for mathematical procedures»  
in manuale VAX 11/780.