# Le terne pitagoriche

di Raffaello De Masi

*La presente serie di articoli è basata su un presupposto di principio; parleremo di algoritmi, sì, e forniremo listati per la risoluzione di problemi, matematici e non, già pronti per l'uso. Ma il nostro scopo, forse inconfessato, probabilmente presuntuoso, è quello di fornire una base perché questa scienza, la ricerca dell'algoritmo (e quella, ancora più seducente, dell'algoritmo ottimale) esca dalle tenebre del sottinteso, per assurgere a vera dignità di disciplina.*

*Cerchiamo di intenderci sul significato di quanto detto: definire un algoritmo destinato a risolvere un particolare problema è cosa abbastanza semplice, sia nel mondo del calcolo che nella vita: basta conoscere, e ciò è irrinunciabile, il problema e le sue varianti per redigere lo schema sequenziale, il diagramma di flusso del procedimento di analisi e soluzione. Ma non sempre la prima soluzione è quella giusta; potrebbe non tener conto di certe condizioni iniziali, magari non previste o raramente accadenti; potrebbe essere troppo semplicistica, e magari non adattarsi ad un problema simile ma non perfettamente identico. Tanto per banalizzare il problema, chi decidesse di fare il pane in casa potrebbe impastare gli ingredienti a casa e poi magari portare tutto dal fornaio sotto casa; ma potrebbe decidere anche di invertire la sequenza (comprare la pasta e cuocerla nel forno di casa sua); un folle, od un autarca di ferro potrebbe decidere addirittura di coltivarsi nel giardino di casa il grano destinato alla bisogna; e, infine ci sarebbe la persona che invece di pane vorrebbe preparare grissini, con modalità di impasto, di lavorazione e di cottura diverse. Preparare un algoritmo per ciascuna di queste e per altre ipotesi, singolarmente, non presenterebbe eccessivi problemi; potrebbe invece essere più complicato creare un algoritmo generico destinato alla preparazione di qualsivoglia alimento nel forno di casa.*

*Trasportiamo il tutto in campo informatico, e facciamo ancora una volta un esempio: il metodo più banale per l'individuazione dei numeri primi è quello rappresentato dal crivello di Eratostene. Tutti lo conoscono, ed a tutti ne è nota la procedura lunga e noiosa. Certo, implementare il procedimento su un computer, e lasciare che se la sbrighi da solo, è una tentazione troppo forte. Ma saremmo cattivi amministratori del nostro chip se non ci chiedessimo se non sia possibile realizzare un metodo, un algoritmo, appunto, più efficiente e rapido (d'altro canto, come facevano gli autori dei libri dei nostri nonni a fornire lunghe liste di numeri primi, pur non avendo a portata di mano una tastiera?).*

*Con queste note ci prefiggiamo, quindi, non solo di fornire algoritmi ma di descrivere come ad essi si è arrivati, magari attraversando fasi di affinamento diverse. Vi assicuro che spesso lo studio di un problema può riservare ben più sorprese di quante se ne immagini, e fornire maggiori soddisfazioni della stessa soluzione.*

```
0:      CLS
        INPUT " Quante terne desideri " , m
        CLS


        k = 0 : a = 2 : b = 3
        PRINT "Stampa delle prime ";m;" terne pitagoriche."
        PRINT
        PRINT " -----------" : PRINT


1:      b=b-2 : IF b<= 0 THEN a = a+1 : b = a-1
        x=a : y=b

2:      n= INT (x/y ) : z = x - n * y
        IF z <> 0 THEN x = y : y = z: GOTO 2

3:      test = y = 1
        IF test THEN k = k+1 : PRINT k;"°    terna" , a*a-b*b , 2*a*b , a*a+b*b
        test = test * ( k MOD m = 0 )
        IF test = 0  THEN  1

4:      PRINT: PRINT " Vuoi riprovare ? "

5:      a$ = INKEY$ : IF a$ = "" THEN 5

        IF UCASE$(a$) = "S" THEN 0
        CLS  : PRINT "OK"

        END
```

*Figura 1 - Programma per la determinazione automatica delle prime m terne pitagoriche redatto in Microsoft Basic 2.0, per macchina Apple Macintosh.*

Esempio di output del programma della figura 1

Stampa delle prime 50 terne pitagoriche.

-----------

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ° | terna | 3 | 4 | 5 |
| 2 ° | terna | 5 | 12 | 13 |
| 3 ° | terna | 7 | 24 | 25 |
| 4 ° | terna | 15 | 8 | 17 |
| 5 ° | terna | 9 | 40 | 41 |
| 6 ° | terna | 21 | 20 | 29 |
| 7 ° | terna | 11 | 60 | 61 |
| 8 ° | terna | 35 | 12 | 37 |
| 9 ° | terna | 13 | 84 | 85 |
| 10 ° | terna | 33 | 56 | 65 |
| 11 ° | terna | 45 | 28 | 53 |
| 12 ° | terna | 15 | 112 | 113 |
| 13 ° | terna | 39 | 80 | 89 |
| 14 ° | terna | 55 | 48 | 73 |
| 15 ° | terna | 63 | 16 | 65 |
| 16 ° | terna | 17 | 144 | 145 |
| 17 ° | terna | 65 | 72 | 97 |
| 18 ° | terna | 77 | 36 | 85 |
| 19 ° | terna | 19 | 180 | 181 |
| 20 ° | terna | 51 | 140 | 149 |
| 21 ° | terna | 91 | 60 | 109 |
| 22 ° | terna | 99 | 20 | 101 |
| 23 ° | terna | 21 | 220 | 221 |
| 24 ° | terna | 57 | 176 | 185 |
| 25 ° | terna | 85 | 132 | 157 |
| 26 ° | terna | 105 | 88 | 137 |
| 27 ° | terna | 117 | 44 | 125 |
| 28 ° | terna | 23 | 264 | 265 |
| 29 ° | terna | 95 | 168 | 193 |
| 30 ° | terna | 119 | 120 | 169 |
| 31 ° | terna | 143 | 24 | 145 |
| 32 ° | terna | 25 | 312 | 313 |
| 33 ° | terna | 69 | 260 | 269 |
| 34 ° | terna | 105 | 208 | 233 |
| 35 ° | terna | 133 | 156 | 205 |
| 36 ° | terna | 153 | 104 | 185 |
| 37 ° | terna | 165 | 52 | 173 |
| 38 ° | terna | 27 | 364 | 365 |
| 39 ° | terna | 75 | 308 | 317 |
| 40 ° | terna | 115 | 252 | 277 |
| 41 ° | terna | 171 | 140 | 221 |
| 42 ° | terna | 187 | 84 | 205 |
| 43 ° | terna | 195 | 28 | 197 |
| 44 ° | terna | 29 | 420 | 421 |
| 45 ° | terna | 161 | 240 | 289 |
| 46 ° | terna | 209 | 120 | 241 |
| 47 ° | terna | 221 | 60 | 229 |
| 48 ° | terna | 31 | 480 | 481 |
| 49 ° | terna | 87 | 416 | 425 |
| 50 ° | terna | 135 | 352 | 377 |

# Bentornata, MC Algoritmi!

Posso dire la mia? Il buon De Masi non se la prenderà per questa bonaria intrusione, oltretutto sobillata dal perfido m.m.! Ciao, Raffaello, sono contento che MC algoritmi (errore giovanile del sottoscritto...) sia tornata sulla scena. Spinto da fervore di comunione scientifico-divulgativa (ma in realtà per ripicca verso Marinacci...), impugno la tastiera per corroborare ed integrare qualcuna delle notizie riportate nel tuo testo.

Il nome completo del buon Howarizmi era per la precisione Abu Ja'far Mohammed ibn Musa al Khowarizmi, che letteralmente significa «il padre di Ja'far, Maometto, figlio di Mosè, nativo di Kowarezm». Il suo testo «Al-jabr» («del completamento e della riduzione») non è forse uno dei più importanti della storia della matematica, ma credo vada sottolineato che indirettamente ha avuto molto più valore di altri, in quanto sulle sue pagine infatti studiò e si formò la nuova scuola di matematici medievali. Il primo fra tutti fu Leonardo Pisano detto Fibonacci, senza dubbio il più grande matematico medievale. Credo vada anche ricordato che Fibonacci, oltre a NON aver scoperto i numeri che gli si attribuiscono (pensi di parlarne, in futuro?), ha il merito di aver introdotto in Europa la notazione araba dei numeri, il segno negativo e le frazioni decimali (che però non usava...), tutte cose ben conosciute dai matematici dell'Islam.

Per quanto riguarda il termine Algoritmo, mi risulta che un dizionario tecnico tedesco del XVIII secolo (Vollstandiges Mathematisches Lexicon, Leipzig 1747) riporti la voce Algorithmus più o meno così: «sotto questa denominazione sono raccolte le nozioni dei quattro tipi di calcolo aritmetico ossia somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione». Più o meno nello stesso periodo, inoltre, circolava fra i matematici la dizione «Algorithmus Infinitesimalis», che stava ad indicare il tipo di calcolo con quantità infinitamente piccole inventato da Leibnitz, il nostro Calcolo Infinitesimale, appunto. Mi sembra tuttavia opportuno ricordare che, secondo la più precisa definizione moderna, algoritmo non è sinonimo di procedimento, metodo, ricetta. Un algoritmo è qualcosa di più preciso, e con questo termine gli informatici definiscono solo quei procedimenti di calcolo che soddisfino certe proprietà formali: siano determinati, finiti,... e un sacco di altre cose che probabilmente facciamo meglio a lasciare dove stanno, contentandoci della definizione «popolare» che va bene lo stesso.

Ultima cosa: secondo me l'algoritmo per la ricerca delle terne pitagoriche prime era già conosciuto dai Greci, ma probabilmente risale ai Babilonesi. Sembra anche probabile che fosse noto agli Egiziani, che notoriamente coi triangoli rettangoli ci sapevano fare.

Bene, non voglio continuare oltre perché non credo che riuscirei a sopportare Marinacci con i suoi. «Ma sei matto? Vuoi proprio far scappare via i lettori? Io ti dico di scrivere tre righe e tu mi fai una pagina!» Ciao, MC Algoritmi, bentornata.

*Corrado Giustozzi*

## Sull'origine della parola algoritmo

Nel 632 mentre si preparava a dichiarare guerra all'impero bizantino, Maometto moriva a Medina. Ma questo avvenimento non fermò il fanatismo dei suoi seguaci che, in poche settimane, assalirono e conquistarono senza troppi sforzi Damasco, Gerusalemme e gran parte della Mesopotamia, la terra tra i Due Fiumi. Nel 641 cadde, infine, Alessandria, che da tempo immemorabile era considerata la capitale culturale del mondo, con la sua leggendaria immensa biblioteca.

Quanti volumi abbia custodito tale biblioteca non ci è dato di sapere: dovevano, comunque, contarsi in decine, e, forse, centinaia di migliaia, se è vero quanto racconta Teofano Clitone, un oscuro storico del IX secolo, che riferisce come il catalogo delle opere pesasse più di dieci talenti (260 Kg circa). Una leggenda narra che al generale vittorioso che chiedeva, alla Medina, cosa occorresse fare di tanti libri, fu risposto di bruciarli, in quanto, se contenevano cose già descritte nel Corano, erano inutili, ma se contenevano cose in contrasto con esso erano, oltre che superflui, dannosi. In ogni caso, sia questa verità o invenzione, appare comunque esagerata la leggenda secondo cui i libri furono sufficienti per riscaldare le acque delle terme alessandrine per lungo tempo. Più probabilmente, al tempo della conquista da parte degli arabi, la biblioteca era già stata espoliata della maggior parte dei volumi da invasioni precedenti e depauperata del suo patrimonio da secoli di incuria ed abbandono.

Comunque stiano effettivamente le cose, la fase decadente della cultura alessandrina era, al tempo delle invasioni arabe, già in fase estremamente avanzata. Il successivo secolo fu trascorso dagli arabi in guerre sanguinose, sia con il vicinato, sia, quando proprio non avevano da fare, tra di loro. Quest'ultimo tipo di sport nazionale portò, alla fine, ad uno scisma tra gli arabi occidentali del Marocco, e quelli orientali, che, sotto il califfato di al-Mansur avevano stabilito la loro capitale a Bagdad, destinata a divenire il centro culturale dell'oriente ed il nuovo polo mondiale delle scienze. La divisione tra i due califfati, comunque, fu più formale che reale, essendo, l'arabo, uomo piuttosto poco legato al senso di casa, patria, o regione d'origine. Perciò l'unità del mondo arabo può essere considerata (si confronti l'ottimo testo di Loria, Storia delle matematiche, ed. Cisalpino-Goliardica) molto più culturale, economica e religiosa, piuttosto che politico-geografica. Lo dimostra il fatto che ad una moneta pressoché comune (quelle recanti l'effigie del califfo al-Mansur avevano praticamente corso legale in tutta la penisola araba) ed ad una unità religiosa davvero ferrea (lo stesso califfo era ricordato, nelle preghiere, anche dai sudditi del califfato vicino) si contrapponeva, ad esempio, la mancanza di una lingua comune, pur rappresentando l'arabo una specie di lingua aulica per gli intellettuali.

Il primo secolo di espansione araba fu dedicato, come già abbiamo detto, a guerre sanguinose, condotte nel segno del fanatismo più acceso. Il livello culturale del periodo è perciò piuttosto modesto (la storiografia è praticamente ignorata ed a ciò è dovuta la mancanza di molte documentazioni storiche precise). Alla forza dell'arabo dal punto di vista militare era, però, da contrapporre una estrema debolezza culturale. L'impero dei Sabei dell'Arabia Felice era praticamente composto esclusivamente dai nomadi del deserto, i beduini, del tutto analfabeti. Ovvio che i conquistatori furono vittime, dal punto di vista culturale, dei popoli conquistati, specie se si considera che l'espansione ad ovest ed a nord avveniva a spese dell'impero bizantino, dotato di cultura millenaria e raffinata. Poche sono le date certe: si sa che intorno al 766 fu portata a Bagdad, dall'India, un'opera di contenuto astronomico (non si dimentichi che matematica e scienza della sfera celeste erano, per gli indiani, parte dello stesso ceppo scientifico), dal titolo Brahmasphuta Siddhānta che, nel 775 fu tradotta in arabo col nome di Sindhin; ancora, l'opera astrologica di Tolomeo, il Θετραβιβλος, venne tradotta verso l'80.

Il primo secolo, pertanto, tra il 650 ed il 750 fu trascorso dall'arabo da una parte a menare le mani, e magari a suonarsele di santa ragione anche col suo alleato della settimana prima, e dall'altra ad assorbire come una spugna la cultura dei paesi conquistati; né, ad onore del vero, il resto del mondo brillò in quel periodo per progresso culturale, anzi, probabilmente, senza le guerre arabe, e la conseguente azione di saccheggio e riunione di beni sotto un ridotto numero di proprietari, probabilmente buona parte delle testimonianze culturali e del patrimonio letterario dei tempi precedenti sarebbe andato

Tanto per cominciare, e dato il ridotto spazio a disposizione lasciatoci dai cenni storici che leggete qui sopra, tratteremo un argomento piuttosto immediato e breve e, essendo a conoscenza della tecnica adatta, di facile soluzione: la ricerca delle terne pitagoriche. Si intende come terna pitagorica quella serie, di tre, appunto, numeri interi, che indicheremo con a,b, e c, che soddisfano alla relazione

$a = \sqrt{(b^2+c^2)}$, o, che è lo stesso
$a^2 = b^2+c^2$

Tanto per esemplificare 3, 4 e 5 sono una terna pitagorica, in quanto essi possono rappresentare efficacemente i valori di un triangolo rettangolo.

È ovvio che la proposta dei multipli di tali valori rappresenta una soluzione banale del problema; d'altro canto se questi tre sono molto conosciuti ben pochi conoscono il terzetto 7,24 e 25 e ancora meno quello di 115, 252 e 277; ma chi sapeva che 20559, 32680, e 38609 soddisfano perfettamente alla stessa relazione?

La ricerca delle terne pitagoriche primitive (quelle cioè, non ottenute come multiplo di altre più piccole) è qualcosa di estremamente lungo e noioso se eseguita per tentativi, anche alla fantastica velocità di un 16 o 32 bit di cilindrata. Esiste però un algoritmo ottimale, messo a punto nel XVI secolo da un misconosciuto matematico finlandese, tal Rijhordsansen (anche se la paternità di tale metodo viene sovente attribuita ad altri) che permette di generare terne pitagoriche con una tecnica molto elegante e geniale.

Essa può essere così riassunta:

scegliere due numeri, x e y tali che x sia più grande di y

x+y sia un numero dispari (quindi, uno ed uno solo dei numeri sia dispari)

x e y siano primi tra di loro (non abbiano divisori comuni, tranne l'unità).

Sia:

$a = x^2-y^2$
$b = 2 \cdot a \cdot b$
$c = x^2+y^2$

I numeri a,b e c sono terna pitagorica. Il procedimento è tradotto in programma nella figura 1.

Ecco come un algoritmo semplice e piuttosto breve può risolvere rapidamente ed efficacemente un problema altrimenti risolubile solo in maniera penosa ed estemamente frustrante. Stavolta ci fermiamo qui, a causa dello spazio tiranno; ma dalla prossima non daremo solo l'algoritmo ed il listato bell'e fatto. Cercheremo di seguire la strada che ha portato alla formulazione dell'algoritmo stesso presentato nella puntata; ne vedremo, di cose interessanti!

perduto. La seconda metà del VIII secolo rappresentò, invece, il momento di risveglio culturale islamico; ciò coincise, in maniera abbastanza precisa, con l'affievolirsi, ma solo temporaneo, dell'interesse del popolo arabo per il suo passatempo preferito, quello di menare le mani; Bagdad divenne piuttosto rapidamente il polo culturale mondiale, sotto il dominio di quattro califfati, quelli di al-Mansur, Assoh al-Matath, Harun ar-Rashid ed al-Mamun, durante il cui regno furono tradotti alcuni paragrafi degli elementi di Euclide.

Questi mecenati invitarono a Bagdad e presero sotto la loro protezione i maggiori esponenti culturali del tempo, provenienti soprattutto dalla Siria e dall'India (vedremo tra poco come tutto ciò sia importante).

Il califfato di al-Mamun fu però il periodo in cui furono tradotte il maggior numero di opere; leggenda vuole che al califfo sia apparso in sogno Aristotele, che gli affidò il compito di difensore della cultura contro la «barbarie degli infedeli». Al-Mamun lo prese talmente in parola che decise di far tradurre in arabo tutti i testi che fosse riuscito a trovare; ed arrivò addirittura a trattare, a tale scopo, addirittura con gli infedeli.

Per avere una copia completa degli Elementi euclidei, non esitò a trattare con l'impero bizantino, con il quale l'impero arabo aveva avuto finora solo rapporti di arma da taglio.

I volumi raccolti, tradotti e non, furono conservati, a Bagdad nella «Casa della Cultura», la cui reggenza ed organizzazione era affidata ad un gruppo di scienziati, specialisti ognuno di un campo diverso. Tra i membri di tale gruppo c'era un astronomo e matematico, tal Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi (letteralmente, nato a Khowarezm, la moderna Kyma), nato nel 780 e morto intorno all'850; a lui sono ascritte non meno di cinque opere di matematica ed astronomia originali, tra cui una collezione di Tavole Astronomiche, probabilmente tratta da analoghi lavori indiani, di cui non si possiede più l'originale versione, ma una versione rifatta due secoli più tardi da un arabo di Spagna, tal Malesma ibn-Ahmed al-Madgriti.

Ma le opere più importanti di Musa furono due, destinate a lasciare un segno indelebile nella storia e nel linguaggio matematico. La prima, Al-jabr wa'l muqâbalah fornì alle lingue europee uno dei termini più popolari del gergo matematico, algebra, appunto. Ciononostante, il trattato di Musa non può essere considerato uno dei testi sacri della matematica; a parte le indubbie, e per la verità mai disconosciute dall'autore, molte paternità degli argomenti trattati, l'opera risulta un notevole passo indietro rispetto all'Arithmetica diofantea: il suo grosso limite, peraltro dovuto ad una certa impostazione intrinseca della dizione e della lingua araba, è quello di essere oltremodo retorica; tanto per intenderci viene del tutto rifuggita qualsiasi forma di abbreviazione, tanto che i numeri venivano espressi in lettere e non in simboli. Cosa significhi effettivamente al-jabr non è molto certo; l'ipotesi più comune fa tradurre la parola come «completamento», «equilibrio», probabilmente riferito alla tecnica dello scambio delle incognite e dei termini noti tra i due membri di una equazione.

L'opera che ci interessa più da vicino, e che ha dato origine al vocabolo «algoritmo», è da riferire invece ad un'opera di matematica, non pervenutaci se non come una traduzione latina successiva. L'opera, «De numero indorum», era una traduzione ed un parziale rifacimento e sunto delle opere di Brahmagupta (India, VII secolo); l'opera era scritta in maniera così piana e completa, ed esponeva in maniera così estesa il sistema di numerazione indiano, che fu forse per causa sua che si diffuse la ancora attuale credenza che il nostro sistema di numerazione sia di origine araba. Benché infatti Musa non si sia mai attribuito la paternità di quanto da lui esposto, la diffusione del suo volume in Europa portò ad attribuire all'autore anche il sistema di numerazione stesso; all'inizio il sistema di numerazione usante la simbologia indiana fu definito come sistema di Algorismo.

Di qui il passo ad algoritmo (che, oltre tutto faceva tanto classico greco) fu breve. Il tempo ha poi ampliato il significato del termine, che è passato a voler dire qualsiasi generico insieme di regole ed istruzioni destinate a risolvere un particolare problema.

In altre parole, algoritmo rappresenta la descrizione sequenziale delle azioni, gesti, decisioni, atte ad ottenere, partendo da certe premesse, dei risultati desiderati. Cercare se l'ultima cifra di un numero è pari rappresenta il nucleo dell'algoritmo della ricerca dei numeri divisibili per 2, ma anche la serie di operazioni che si eseguono quando si stappa una bottiglia (ricerca del cavatappi, rimozione della carta stagnola dalla bottiglia, avvitatura del pane nel tappo, azionamento delle leve, e così via) rappresenta un algoritmo. Potenza della parola.

Una curiosità prima di chiudere: a Musa, ed agli arabi, non spetta la paternità del nostro sistema di numerazione, l'abbiamo detto; ne intuirono però la notevole potenza, visto che esso sostituì, in breve tempo, le rugginose notazioni finora esistenti, rappresentate da quella romana, e, ancora, da quella, ancora più astrusa e complessa, greca. Ciononostante mancò loro l'idea di continuare sulla strada del simbolismo, che poi porterà alla notazione letterale ed al concetto di formula; tanto che bisognerà aspettare ancora lunghi anni per giungere, nel XVI secolo, con Viete, alla attuale notazione algebrica.