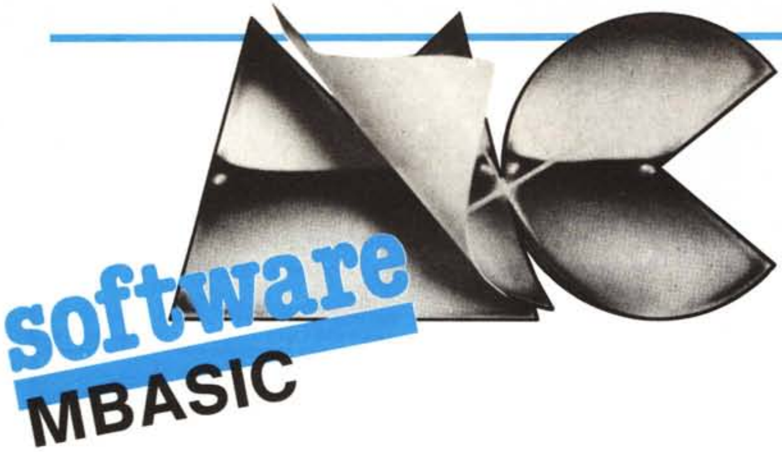

Anche in questo numero pubblichiamo un programma abbastanza interessante e riguardante un argomento matematico: il calcolo del fattoriale con "n" cifre.

In questo caso però contravverremo alle nostre ormai affermate abitudini, pubblicando il programma di un lettore che, per un banale disguido "interno", ci risulta a tutt'oggi "sconosciuto"...

Niente paura! È stata semplicemente buttata via per errore la busta dove l'autore aveva evidentemente segnalato le proprie generalità.

Dato che però il programma ci sembra buono, lo pubblichiamo, invitando il nostro lettore a rifarsi vivo con la redazione.

Per non essere sommersi da lettere di pseudo-autori di tale programma, preghiamo il vero autore di inviarci una seconda copia *esattamente uguale* del testo, cosa che non gli dovrebbe riuscire difficile dato che ha usato un word-processor.

Approfittiamo perciò di questa occasione per consigliare vivamente ai nostri lettori, che ci inviano programmi, di scrivere le proprie generalità, ma non solo sulla busta.

Visto che ci siamo, ricordiamo pure che è anche molto utile indicare la versione dell'MBASIC usata e su quale personal lavora.

Già fin d'ora ringraziamo i lettori per questo tipo di "collaborazione nella collaborazione" ed andiamo ad analizzare il programma in questione lasciando la parola al nostro lettore.

Fattoriale con n cifre

I grandi numeri hanno sempre attratto la fantasia dei matematici. Purtroppo fino all'invenzione del computer tali numeri richiedevano tempi di elaborazione proibitivi per la salute (fino a 20 anni!).

Il programma in questione ci dà una mano nello studio delle proprietà del fattoriale di un numero n [ricordo che n fattoriale = n! = 1*2*3*... * (n-1)*n] calcolandolo con tutte le cifre significative (purché si abbia la pazienza di attendere).

Il calcolo di un fattoriale si riduce quindi ad una semplice (?) moltiplicazione. Sorgono però dei problemi già con 13! (= 6227020800) o 14! (= 8.7178291E + 10) a seconda della precisione del personal, infatti entrando in notazione esponenziale si ha la conseguente perdita di cifre significative (senza accennare alla restrizione del calcolo, nei casi più fortunati, di 69!).

Un metodo per evitare questo inconveniente è quello di suddividere il "numerone" in tante parti da mettere in più variabili. Un esempio non guasta. Calcoliamo 14!. Fino a 13!, con dieci cifre significative tutto fila liscio, ma se moltiplichiamo 13!*14 eccoci in esponenziale. Spezziamo allora 13! in due parti da mettere in due variabili PA e PB, cioè in una "parte alta" e in una "bassa". Siccome 13! ha dieci cifre lo dividiamo in due gruppi di cinque; otteniamo:

PA = INT(6227020800/1E + 5) = 62270 e

PB = 6227020800-INT(6227020800/1E + 5)•1E + 5 = 20800.

Ora possiamo tranquillamente moltiplicare entrambe le parti per 14 ottenendo 14! con tutte le cifre significative; infatti

PA = 14•PA = 871780 e

PB = 14•PB = 291200.

Sia il nuovo PA che il nuovo PB sono ora maggiori di 1E+5. Dobbiamo allora "ridurli" di nuovo usando le formule precedenti. Unica differenza è che la p.a. di PB verrà ora sommata a PA, e quella di PA andrà in una nuova variabile [V(3)].

Avremo cioè:

PA = PA + INT(PB/1E + 5) = 871780 + INT(291200/1E + 5) = 871780 + 2 = 871782

[la p.a. di PB va in PA] e

PB = PB-INT(PB/1E + 5)•1E + 5 = 291200-INT(291200/1E + 5)•1E + 5 = 291200-20000 = 91200

[la parte bassa di PB rimane in PB]. Essendo però PA maggiore di 1E+5 dovremo "ridurlo" come segue:

V(3) = INT(PA/1E + 5) = 8PA = PA-INT(PA/1E + 5)•1E + 5 = 71782.

```
100 PRINT"FATTORIALE CON N CIFRE" : PRINT : PRINT"NUMERO"; : INPUT
NU : B=1 : E=1E+5
105 DIM A(NU*LOG(NU)/LOG(E)+1) : A(1)=1
110 FOR N=2 TO NU
120 FOR K=1 TO B : A(K)=A(K)*N : NEXTK : IF A(B)>=E THEN B=B+1
130 FOR K=1 TO B : IF A(K)<E THEN NEXT K : NEXT N : GOTO 150
140 A(K+1)=A(K+1)+INT(A(K)/E) : A(K)=A(K)-INT(A(K)/E)*E : NEXT K :
NEXT N
150 Z$="000000" : PRINT NU;"!=";MID$(STR$(A(B)),2); : IF B=1  THEN
PRINT : END
160 FOR K=B-1 TO 1 STEP -1
170 B$=MID$(STR$(A(K)),2) : B$=LEFT$(Z$,5-LEN(B$))+B$ : PRINT  B$;
:NEXT K : PRINT
```

Siamo così giunti al risultato corretto, essendo 14! = V(3)+PA+PB = 87178291200. [dove il "+", evidentemente, non sta ad indicare l'operazione di somma algebrica bensì quella di semplice accostamente delle cifre].

Bisogna però notare che se moltiplichiamo PA o PB per un numero troppo grande, ad esempio 1E+9, entreremmo in esponenziale con i soliti problemi. Dovremo quindi fare in modo che ciò non accada, controllando che in una generica variabile V(N) non rimanga un numero tanto grande che, venendo moltiplicato per l'n di cui stiamo calcolando il fattoriale, entri in esponenziale.

Ad esempio, per arrivare al calcolare 1000!, disponendo di nove cifre significative, potremo mettere al massimo 999999, sei cifre, in ogni variabile, dato che 9999999 è troppo grande. [9999999*1000 = 9.999999E+09]. Se invece di 1000! volessimo calcolare 10000! allora il limite scenderebbe a 99999 (cinque cifre) siccome 999999*10000 = 9.99999E+09 mentre 99999*10000 = 999990000. Effettuiamo allora il controllo su 10↑5; se V(N)= 10↑5 allora riduciamo V(N) [V(N+1) = INT(V(N)/1E+5), V(N) = V(N)-V(N+1)*1E+5].

Riassumendo. Per calcolare n! eseguiamo una moltiplicazione suddividendo il "numerone" in tante variabili, riportando i resti. La formula generale per il calcolo del valore "ridotto" della variabile con troppe cifre e del suo resto, sommato alla variabile successiva, è:

V(K) = V(K)-INT(V(K)/NC)*NC e V(K+1) = INT(V(K)/NC)

dove NC è uguale alla potenza di 10 di cui sopra. Converrà ora dare un'occhiata al programma, magari facendolo girare, per meglio assimilare quanto detto finora.

Passiamo ora ad una ricerca svolta con l'ausilio di questo programma.

Una cosa che salta subito all'occhio osservando diversi valori di n!,specialmente se grandi (100!, 400!), è la gran quantità di zeri presenti in coda al numero. Sarebbe interessante scoprire se c'è una legge che governa la formazione di questa coda e magari trovare una formula per il calcolo del numero di questi zeri.

È proprio ciò che ho fatto. La prima idea che viene alla mente è che gli zeri siano dovuti ai multipli di 10 [K*10] presenti nel numero. Ad esempio se calcoliamo 100!, secondo il nostro ragionamento vi dovrebbero essere 100/10=10 zeri (aggiunti da 10, 20, 30... 90); usando il programma però ne contiamo ben 24. La nostra ipotesi non va.

Senza rinunciare completamente ad essa possiamo notare che non solo i multipli di dieci aggiungono zeri, ma anche quelli di cinque [K*5]; infatti nel prodotto li possiamo immaginare, grazie alla proprietà commutativa, moltiplicati per dei multipli di 2 [K*2] cosicché si ottengono dei multipli di dieci [(K*5) * (K*2) = K* (5*2) = K*10].

Calcoliamo di nuovo gli zeri; ora ne risulterebbero 100/5=20 (ora consideriamo anche 15, 25, 35... 95). Ancora non ci siamo. Il passo risolutivo è questo:
gli zeri in coda possono derivare solo dal prodotto dei MULTIPLI DI CINQUE MOLTIPLICATI PER QUELLI DI DUE; ma ognuno non aggiunge necessariamente un solo zero (uno se si moltiplica per dieci, ma due se per cento!). Un numero della forma K*5*2=K*10 può aggiungere un solo zero in coda mentre, se consideriamo i multipli di 25 (seconda potenza di cinque) otteniamo numeri della forma K*25 che, moltiplicati almeno per la potenza seconda di due, ci forniscono due zeri: non uno! [K*5↑2*2↑2=K*100]. Ricalcoliamo gli zeri di coda di 100!. I multipli di 5 ne mettono 100/5=20, ma quelli di 5↑2 ne aggiungono altri 100/25 = 4: quindi in totale 20+4=24. Esatto!. Il ragionamento risulta valido anche per le potenze superiori di 5 dato che, sempre grazie alla proprietà commutativa, possono essere pensate moltiplicate per le uguali potenze del 2, dando vita a numeri della forma K*5↑n*2↑n = K*10↑n. Essi aggiungeranno n zeri in coda al numero. Si arriva così a calcolare che in 1000! ci devono essere ben 249 zeri. Il bello è che dopo le quasi tre ore di calcolo si constata che è proprio così.

D'altronde non poteva essere altrimenti: la matematica non è un'opinione.

Condensando quanto precedentemente esposto si giunge alla seguente formula, che ci dà il numero di zeri di coda in n!:

$$\sum_{i=1}^{INT(LOG_5 N)} INT(N/5\uparrow i)$$

Commentiamola. Abbiamo visto che ogni multiplo di 5↑n, aggiunge n zeri quindi in n! vi saranno int(n/5)+int(n/25)+... zeri fino alla massima potenza del cinque contenuta in n. Infatti 125 non influenzerà 100! dato che non lo moltiplichiamo!. Ecco spiegato il logaritmo in base 5 che ci dà la massima potenza di 5 compresa in n.

A cosa serve il sapere quanti zeri vi sono in n! ? Non lo so. La matematica non va avanti solo per utilità diretta. Posso solo dire: potrà servire...

Un'idea potrebbe essere quella di semplificare il calcolo del fattoriale rendendolo più veloce. Si potrebbero infatti eliminare tutti quei numeri che aggiungono solo zeri... L'idea è lanciata.

P.S. Secondo la formula indicata risulterebbe errato il valore di 69!, riportato nella rubrica S.O.A. di MCmicrocomputer (n. 34). In esso compaiono infatti ben diciotto zeri contro i quindici previsti dalla formula stessa. MC