La Simulazione

di Valter Di Dio

Problemi di ottimizzazione

L'uso della simulazione nei problemi che riguardano la direzione aziendale è piuttosto recente e abbastanza criticato. Il principale motivo di critica è che spesso i modelli economici mal si adattano ad essere simulati essendo molto complessi e particolarmente intrecciati tanto che, a volte, mentre alcuni sostengono che una certa azione sia la causa di certi risultati, altri giurano che sono i risultati ad avere obbligato l'azione. È chiaro che se non si riesce a definire un concetto univoco di causa/effetto non si può poi costruire un modello che, in genere, sarà composto da equazioni del tipo $Y=f(X)$, dove cioè si presuppone la dipendenza del valore di Y (effetto) dalla scelta di X (causa).

A patto però di essere tutti d'accordo sulla parte teorica del modello la simulazione di "Scenari" (così si chiamano i modelli che vengono utilizzati in economia) è oggigiorno sempre più usata per il fatto che le complessità dei sistemi vengono digerite abbastanza bene dai moderni computer per cui non si è più costretti a semplificare le interrelazioni con ovvie approssimazioni del risultato.

Si pensi che il modello dell'economia italiana fino a pochi anni fa (1974) era integrato in una matrice di circa 70 per 70 ed era già considerato troppo esteso per poter essere trattato tanto rapidamente quanto la necessità di previsione su dati recenti esigerebbe.

E veniamo ora ad una semplice applicazione della simulazione in un problema di scelta aziendale; vedremo prima la soluzione matematico-statistica del problema e poi la stessa soluzione con il metodo della simulazione. Il problema, come tutti quelli didattici, è ovviamente molto semplificato, ma la soluzione matematica si rivela subito tanto complicata da scoraggiare chi abbia una "comune" conoscenza matematica.

Problema:

Un fabbricante garantisce il rimborso al cliente se le sue lampadine durano meno di 80 ore. Il prezzo di vendita delle lampadine è di 100 lire (chissà perché nei problemi costa tutto così poco!), mentre il costo di produzione dipende ovviamente dalla qualità della lampadina L (valutata in ore medie di funzionamento) con la seguente formula:

$C(L) = 20+.2 \cdot L$

in pratica le lampadine costano una cifra fissa più una quota dipendente dal tempo medio di buon funzionamento, per cui costruire lampadine buone costa più che costruire lampadine scarse.

La probabilità di rottura delle lampadine segue la nota (nota per chi ci segue) legge esponenziale per cui la funzione di ripartizione sarà:

$$P(T \leqslant t \text{ dato } L)=\int_0^t \frac{1}{L}\, e^{-\frac{x}{L}}\, dx$$

che è uguale a:

$$1-e^{-\frac{t}{L}}$$

Dove t è il numero di ore trascorse ed L è la vita media.

Si vuole sapere quale valore di L massimizza la speranza di profitto del costruttore.

(da "Lezioni di inferenza classica"), A. Serrecchia, Facoltà di Scienze Statistiche di Roma)

Soluzione matematica

Il guadagno del fabbricante sarà dato dalla formula:

Guadagno (L) = Ricavo (L) - Costo (L)

Tutti e tre i valori dipendono ovviamente da L, il costo lo conosciamo mentre il ricavo sarà:

$$R(L)=\begin{cases} 100 & \text{se } T \geqslant 80 \\ 0 & \text{se } T<80 \end{cases}$$

Il valore di R dipende quindi da L, ma in modo casuale (con la legge citata prima).

Per trovare il massimo guadagno dobbiamo perciò massimizzare rispetto a L la funzione:

Media di G(L) = Media di R(L) - Media di C(L)

ma la media di C(L) non dipende dal numero di lampadine che superano le 80 ore e quindi resta uguale a C(L). La media di R(L), che ricordiamo è il ricavo, sarà uguale al prezzo di vendita per il numero di lampadine ancora in vita dopo 80 ore e quindi:

$100 \cdot$ Probabilità ($T \geqslant 80$)

la probabilità che T sia maggiore o uguale ad 80 è uno meno la probabilità che T sia strettamente minore di 80, probabilità questa che conosciamo dai dati del problema e quindi:

$R(L) = 100 \cdot (1-Pr\ (T<80))$

ovvero, sostituendo alla probabilità che il tempo (T) sia minore di 80 la corrispondente funzione di ripartizione otteniamo:

$$R(L)=100*(1-(1-e^{-\frac{80}{L}}))$$

e quindi:

$$R(L)=100*e^{-\frac{80}{L}}$$

per cui il guadagno da massimizzare sarà uguale a:

$$G(L)=100*e^{-\frac{80}{L}}-C(L)$$

e quindi:

$$G(L)=100*e^{-\frac{80}{L}}-0.2*L-20$$

Questa funzione come vedete non contiene più parametri legati al caso e può quindi essere trattata come una normale funzione matematica di cui occorre trovare il massimo.

Per trovare il massimo di una funzione si deve innanzitutto calcolare la derivata prima, perciò:

$$G'(L)=\frac{100*80}{L^2}*e^{-\frac{80}{L}}-0.2$$

Non sto qui a spiegare come si esegue una derivata, comunque per chi non lo sapesse si tratta di applicare delle semplici regole fisse alla funzione originale, un po' come si fa per calcolare le soluzioni di una equazione di secondo grado. Per cui se non si commettono errori più o meno banali il risultato è praticamente garantito.

Una volta trovata la derivata dobbiamo trovare il punto in cui questa si annulla, per quel valore di L che annulla; la derivata ci sarà, nella funzione originale, un massimo o un minimo (o un flesso orizzontale); lo studio delle derivate successive ci dirà di quale di questi "cosi" si tratta.

Comunque...

$$G'(L)=0 \Longrightarrow \frac{8000}{L^2*e^{80/L}}=0.2$$

e semplificando (fidatevi):

$$L*e^{40/L} = 200$$

per cui:

L = 154 circa

questo sarà quindi il valore di L che il fabbricante dovrà usare per massimizzare il suo guadagno medio.

Questo metodo come avete visto presuppone una serie di conoscenze matematiche non del tutto comuni; vediamo invece come il problema, affrontato per mezzo della simulazione possa essere risolto senza conoscere nemmeno le derivate!

La simulazione

Per simulare un problema come quello esposto si comincia semplicemente dall'accendere un certo numero di lampadine (il massimo possibile compatibilmente con i tempi di esecuzione) costruite con un certo parametro L. Si comincia con un valore piuttosto basso di L, ad esempio 80 o 90 e si vede dopo ottanta ore di funzionamento quante lampadine si sono fulminate e quindi quanti soldi dobbiamo restituire. Si calcola quindi il guadagno con la semplice formula:

Guadagno = 100 • Lampade in vita - Costo di produzione (L)

in cui solo il costo dipende da L.

Si stampa il valore ottenuto, si incrementa L di una quantità a scelta (si può iniziare con passo 10 e poi diminuirlo in prossimità del massimo) e si ripete il tutto.

Arrivati ad un certo punto si nota che il guadagno ricomincia a diminuire e allora si può interrompere la simulazione.

Tutto il ciclo di simulazione, da L = min a L = max andrà poi ripetuto un numero di volte abbastanza elevato e per ciascun valore di L si calcolerà la media dei guadagni realizzati. Sarà quel valore medio che indicherà quale L scegliere in fase di produzione.

Il programma

Il programma di simulazione è abbastanza breve ma occorre considerare che i suoi cicli vengono eseguiti un numero considerevole di volte (il più interno 960.000 volte) prima di ottenere il risultato definitivo. Per effettuare una simulazione completa il programma così come listato in figura 1 impiega ben quattro ore.

Tutta la parte probabilistica è concentrata nella funzione che deve stabilire ad ogni passata (che corrisponde ad un'ora di funzionamento) se la lampadina in esame si fulmina o meno (riga 180). Il metodo utilizzato è il solito delle code di attesa, più precisamente quello utilizzato per determinare se si verifica un evento o meno. In pratica si genera un numero casuale equidistribuito e lo si sovrappone alla distribuzione di probabilità dell'evento (nel nostro caso data dal problema); se il punto cade sotto la funzione l'evento si verifica, altrimenti no. La funzione di ripartizione dell'evento "si fulmina una lampada" nel problema si otteneva dall'integrale della curva di distribuzione, per la simulazione invece la funzione di densità non è continua, dato che il tempo viene incrementato di un'ora per volta, e quindi l'integrale definito tra zero e t dell'esempio matematico viene sostituito dalla sommatoria della funzione di densità per T che va da zero ad 80. Nella riga 160 si trova infatti, in Basic, l'equivalente della seguente formula:

$$P(T \leqslant t/L) = \sum_{x=0}^{t} \frac{1}{L} e^{-\frac{x}{L}}$$

come vedete è praticamente la stessa cosa della formula già incontrata solo che al simbolo di integrale è stato sostituito il simbolo della sommatoria. E questo, per un computer, è un grosso vantaggio, in quanto, mentre per eseguire un integrale ci vuole parecchio tempo, una sommatoria è invece praticamente immediata.

Una volta calcolato il valore di P, che varia ad ogni ora e per ciascun L, il programma comincia a scorrere il vettore LL(X) che rappresenta le lampadine; il contenuto di ciascun elemento di LL(X) vale 1 se la lampada è accesa e 0 se è spenta. Per le lampade accese (riga 180) si calcola la probabilità di rottura che equivarrà alla probabilità di fulminarsi di una lampada al tempo T diviso il numero delle lampade accese.

Terminato l'esame delle lampade si incrementa il tempo finché non trascorrono 80 ore. A questo punto, senza cambiare L, viene ripetuto l'esperimento per 10 volte (sarebbe meglio aumentare questo valore almeno fino a trenta, ma il tempo di elaborazione raggiungerebbe le dodici ore) e si calcolano le medie del numero di lampadine ancora accese dopo ottanta ore e del guadagno ottenuto. Si stampano questi due risultati e si passa al successivo valore di L.

La figura 2 mostra il risultato di una simulazione completa. Si nota abbastanza chiaramente il massimo compreso tra L = 150 ed L = 160.

Si vede però un massimo relativo intorno ai valori di 90 ÷ 100; questo massimo non si ottiene invece dalla stima puntuale effettuata matematicamente, anzi, dall'analisi della funzione di ripartizione, in quel punto non succede nulla di particolare. E allora da dove viene quel massimo?

Se noi proviamo a far girare il programma con valori di P costanti, se cioè non facciamo dipendere da L il numero delle lampadine fulminate ad ogni passata, si scopre che il guadagno decresce costantemente all'aumentare di L, infatti la curva del costo di produzione è una retta. Quel massimo corrisponde in pratica al punto di incrocio tra la funzione di ripartizione probabilistica e la retta dei costi. In termini pratici corrisponde al valore del parametro L che massimizza il guadagno del fabbricante nel caso peggiore, ovvero nel caso che il numero di lampadine che si fulminano sia sempre il massimo possibile compatibilmente con la distribuzione di probabilità. Infatti dire che in media le lampade vivono 100 ore non garantisce dal fatto che dopo 5 ore se ne siano fulminate il 50%. Se un evento del genere succede, il fabbricante che ha scelto per L il valore di 154 perde molto di più di uno che abbia scelto 90.

Con la simulazione perciò abbiamo trovato oltre al valore cercato anche un secondo valore che con la stima puntuale non sarebbe emerso, e per trovare il quale si sarebbe dovuto usare un metodo particolare di stima che prende appunto il nome di MINI-MAX: la minima perdita nella massima "sfiga".

```
100     HOME
110     N = 100: DIM LL(N):E =  EXP (1)
120     FOR L = 90 TO 200 STEP 10
130       FOR R = 1 TO 10
140         FOR X = 1 TO N:LL(X) = 1: NEXT :LV =
             N:P = 0
150         FOR T = 0 TO 79
160           P = P + (E ^  - (T / L)) / L
170           FOR X = 1 TO N
180             IF LL(X) AND  RND (1) < P / LV THEN
                 LL(X) = 0:LV = LV - 1
190           NEXT
200         NEXT
210         G = 100 * LV - N * (20 + L * .2)
220         M = M + G:V = V + LV
230       NEXT
240       PRINT "L= "L,"ACCESE= "V / 10:V = 0
250       PRINT ,"GUADAGNO= "M / 10:M = 0
260       PRINT
270     NEXT
```

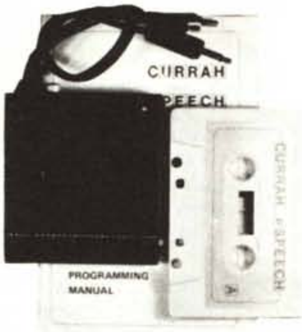
Figura 1 - Listato del programma che permette di simulare il funzionamento di 100 lampadine per 80 ore onde valutare quale sia lo standard di produzione che conviene adottare per massimizzare i profitti.

```
L= 90      ACCESE= 72.1
           GUADAGNO= 3410

L= 100     ACCESE= 73.5
           GUADAGNO= 3350

L= 110     ACCESE= 74.8
           GUADAGNO= 3280

L= 120     ACCESE= 77.3
           GUADAGNO= 3330

L= 130     ACCESE= 79.4
           GUADAGNO= 3340

L= 140     ACCESE= 82.7
           GUADAGNO= 3470

L= 150     ACCESE= 85.6
           GUADAGNO= 3560

L= 160     ACCESE= 86.4
           GUADAGNO= 3440

L= 170     ACCESE= 87.7
           GUADAGNO= 3370

L= 180     ACCESE= 88.3
           GUADAGNO= 3230

L= 190     ACCESE= 90.2
           GUADAGNO= 3220

L= 200     ACCESE= 91.5
           GUADAGNO= 3150
```

Figura 2 - Output del programma di simulazione, si vede nettamente il massimo per i valori di L compresi tra 150 e 160, ma anche un massimo relativo intorno ad L = 100. Per ottenere questi risultati un Apple II impiega circa quattro ore.

MI.PE.CO. VENDITA PER CORRISPONDENZA

INTERFACCIA PARLANTE CURRAH L. 99.000

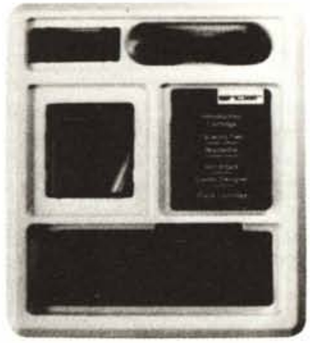


Scrivete le parole da pronunciare "Lei" le leggerà:
LET S$ = "sAlve" enter
sentirete la parola salve dall'altoparlante del T.V.
Molti programmi prevedono già il suo uso (Birds and the Bees, Lunar jet man, maziacs, VOICE CHESS ecc. ecc.)

MANUALE COMPLETO IN ITALIANO
parla attraverso il televisore con una chiara voce sintetica

ESTENSIONE PER SPECTRUM

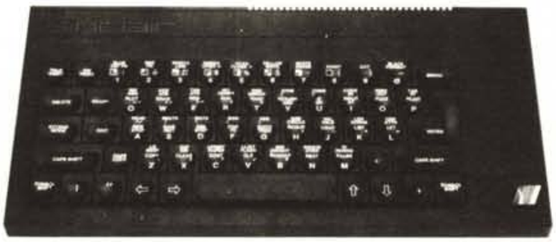
299.000 tutto compreso 3 mesi di garanzia



COMPRESE: 4 cartucce con 5 programmi (introductory, master file, tasword two antattack, games designer). **Istruzioni in italiano**

SPECTRUM 48K PLUS

con lo SPECTRUM plus **manuale in italiano** *e in regalo 5 programmi in italiano (conto corrente, grafica funzioni, bioritmi, esapedone + il Supercopiatore di Massimo Rossi) ed inoltre 6 programmi originali inglesi fra cui il famoso word processor TASWORD TWO.*



399.000
tutto compreso 6 mesi di garanzia

QL ultima versione con nuovi programmi 1.099.000
alimentatore, manuale in inglese, 8 cartucce con 4 programmi.

nuovo SPECTRUM 48K + ... 399.000
manuale in italiano, cavetti alimentatore, cassetta dimostrativa e oltre 130.000 lire di software originale in inglese e in italiano

INTERFACCIA UNO + MICRODRIVE 299.000
(4 cartucce con 5 programmi masterfile, tasword two ant attack, games designers e cartuccia dimostrativa)

MICRODRIVE 149.000
si usa con l'interfaccia 1. Compresa 1 cartuccia con progr. dimostrativo.

STAMPANTE ALPHACOM 32 .... 199.000
per Spectrum e ZX 81 istruzioni in italiano. 2 rulli di carta in regalo

EPSON RX 80 .... 699.000
100 cps, solo con interfaccia Centronics

MANNESMANN TALLY MT 80 + ... 599.000
foglio singolo e continuo, interfaccia Centronics, 100 cps

INTERFACCIA CONVERTITORE CENTRONICS PER QL CON CAVO ... 99.000

GARANZIA 48H

la MI.PE.CO. si impegna a sostituire tutto il materiale spedito, se trovato malfunzionante, entro 48 ore dal ricevimento.

INTERFACCIA PARLANTE CURRAH 99.000
manuale completo in italiano. Tutti i suoni attraverso il Vostro televisore.

TRISLOT 27.000
presa tripla per Spectrum

10 RULLI di carta termica × ALPHACOM 32 .... 34.000

MODULO CONTINUO 2000 PEZZI 39.000
foglio bianco 11" singola copia

8 CARTUCCE × MICRODRIVE 49.000

ESPANSIONE + 32K × SPECTRUM 79.000
issue 2 o 3 specificare, facilissima da montare, istruzioni dettagliate in italiano con fotografie, porta il Vs. Spectrum da 16K a 48K (ad esaurimento).

TASTIERA DELLO SPECTRUM PLUS 79.000
Kit per trasformare lo Spectrum normale in Plus. (lista di attesa).

NIKE BACK UP 79.000
mantiene l'alimentazione allo Spectrum per oltre 30 minuti anche se viene a mancare la tensione di rete. Batterie nickel cadmio comprese.

PARTI DI RICAMBIO PER SPECTRUM

AVVERTENZE - tutti i prezzi sono comprensivi di IVA e spese postali - per ordini inferiori alle 50.000 lire aggiungere L. 5.000 per le spese di spedizione -pagamento contrassegno al ricevimento del pacco -segreteria telefonica in funzione fuori orario, chiedete listini o altre informazioni Vi risponderemo. **-sconti quantità**

INFORMAZIONI E ORDINI: **MI.PE.CO.** - Cas. Postale 3016 - 00121 ROMA (OSTIA) - Tel. 06/5611251.