

Radici quadrate in multipla precisione

di Diego Favaro - Ponte di Piave (TV)

Prima di analizzare il programma proposto consigliamo i lettori interessati di ritornare con la mente ai tempi in cui calavano i banchi della scuola media... tempi in cui erano costretti a calcolare le radici quadrate a mano, secondo un metodo molto elegante, ma che tutto sommato non viene più usato, anche perché oramai siamo più che abituati a lasciare l'ingrato compito alle nostre calcolatrici.

A questo punto a chi non bastasse la "misera" precisione di 13 cifre ottenibile con le TI a noi note, consigliamo di usare il programma in questione, che consente di calcolare, con la "mostruosa" precisione di 87 cifre, la radice quadrata di un numero avente la bellezza di 174 cifre, al massimo.

Diciamo subito che per ottenere tale precisione bisogna aspettare veramente parecchio: a questo scopo riportiamo la stima dei tempi (fig. 1) in funzione del numero di cifre richieste e fornita dal nostro pazientissimo lettore, il quale avrà aspettato le quasi 4 ore per poter mostrare trionfante ai suoi amici una sfilza interminabile di cifre, finora dominio esclusivo dei computer più grandi. Che poi i suoi amici si fidino del risultato, beh, questo è un altro discorso...

Noi ci fidiamo ad esempio che la radice di 2 è:

1.414213562373099048801688722
4209698078569

ma forse qualche lettore vuole verificarlo?

In questo caso, come si può vedere, la precisione ottenuta è di 40 cifre, in quanto nelle impostazioni iniziali abbiamo immesso il valore 40 al momento indicato.

Per gli irriducibili un altro esempio: sapete qual è la radice di

74214925478119562903314.9217?

Approssimativamente tale numero vale 7421492 EE + 16 e perciò calcolandone la radice con il "misero tastino" della 59 otteniamo circa 2.7242416 EE + 11, mentre con 50 cifre di precisione otterremo 272424164636.9124188588085240...

e qui ci fermiamo per non inimicarci i tipografi...

Veniamo dunque al metodo usato: come detto ricalca fedelmente il metodo insegnatoci alle medie, quello tanto per intenderci (non scendiamo nei particolari...) per cui si inizia a separare dalla destra coppie di cifre, dopodiché si estrae la radice della coppia più a sinistra ecc. ecc.

Il programma esegue i calcoli con un numero via via crescente di cifre fino a raggiungere, in certi casi, il valore di 90.

Ciò si ottiene mediante delle "memorie giganti" (neologismo dell'autore, che rende bene l'idea) composte di un numero di memorie sempre più grande.

Una specie di flow-chart a parole può essere il seguente:

1) — Azzeramento memorie e varie inizializzazioni.

— input di un numero intero per le cifre desiderate nell'output (massimo 87).

— input del numero di cui si vuol estrarre la radice (massimo 174 cifre)

— spezzamento del numero in questione (che chiameremo NUMERO) in coppie a partire da destra. Se NUMERO fosse il 7492543 si otterrebbe 7 49 25 43.

2) — SE ho raggiunto il numero di cifre desiderato ferma l'esecuzione, **ALTRIMENTI** prosegui.

— Inserimento alla destra di MINUENDO (una delle "memorie") della coppia più a sinistra di NUMERO (nell'esempio di prima è 07), ed eliminazione di quest'ultima da NUMERO (nello stesso esempio resta 49 25 43).

3) — Ricerca del massimo N intero tra 0 e 9, tale da soddisfare la diseuguaglianza $(\text{NUMERO} - 20 + N) \cdot N < \text{NUMERO}$, ed inserimento di questo N alla destra di RISULTATO (altra memoria).

4) — SE al punto 2 sono state tolte tutte le coppie, si aggiungono due zeri alla destra di MINUENDO e si ritorna al punto 3, **ALTRIMENTI** si va al punto 2.

Questa la descrizione del listato:

003-064 subroutine che esegue la moltiplicazione di un intero tra 0 e 10 compresi, per una qualsiasi "memoria" le cui memorie singole estreme sono indicate da RCL2 e dal 7° registro HIR (uno pseudo carry è in HIR 2). La posizione e l'etichettamento rende il richiamo di tale subroutine più rapido di un SBR 0 03.

065-121 input dati e segnalazione errori.

122-154 ricerca della posizione della prima coppia di numeri più a sinistra di NUMERO (v. punto 1)

155-231 incremento di 0.1 (in forma exp per le HIR) per gli indici delle massime memorie da usare durante il loop corrente (dopo 10 loop quindi questo valore aumenta di una unità, segno che si deve utilizzare una memoria in più). Inserimento di due zeri alla destra della "memoria" che servirà per la sottrazione "gigante" (ciò viene fatto usando due volte la subroutine B con 10 come moltiplicatore); questo serve a "far posto" ad una coppia di numeri provenienti dalle due posizioni più a sinistra di

quello che è rimasto del numero di partenza.

232-277 facendo riferimento alla figura 2, "travaso di memoria" da BETA a GAMMA e moltiplicazione dell'ultima per 20, cioè prima per 2 e poi per 10.

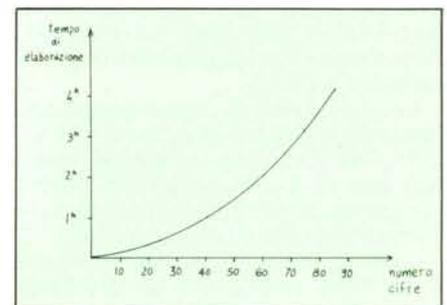


Figura 1 - Diagramma indicativo dell'andamento dei tempi di elaborazione con il numero di cifre richieste per la precisione.

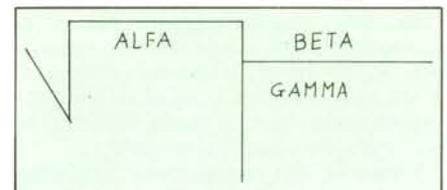


Figura 2 - Rappresentazione schematica dell'operazione di estrazione di radice quadrata del numero ALFA. Il risultato è BETA ed i calcoli intermedi si chiamano GAMMA.

278-388 ricerca del massimo N come precisato nel punto 3. Per non sprecare troppo tempo partendo ogni volta dal 9 e decrementando di 1, viene testato dapprima il 5: SE è troppo grande decrementare di 1 e così via, **ALTRIMENTI** usare il 9 e decrementare via via di 1.

389-433 "travaso di memoria" e inserimento di N alla destra del risultato.

434-452 come il punto 4.

453-479 output

Il controllo per il termine dell'esecuzione è dalla istruzione 165 alla 173. I flag sono usati per saltare quelle operazioni divenute inutili una volta esaurite le cifre accoppiate del numero di partenza.

Il contenuto delle memorie e dei registri HIR è il seguente:

- 00: contatore per il punto 4
- 01: 1 EE 10
- 02: indice della memoria di partenza per le superoperazioni
- 03: memoria "jolly" multiuso
- 04: come per la 02, utilizzata per il sottraendo nella super sottrazione

05: indice di partenza delle memorie usate per immagazzinare il risultato della super moltiplicazione.

da 06 a 14: termine GAMMA della radice, con l'avvertenza che la parte più significativa è in R14.

da 15 a 23: termine ALFA (il radicano-do), con la parte più significativa in R23 da 33 a 41: termine BETA (la radice), con la parte più significativa in R41

da 42 a 59: numero di cui si deve calcolare la radice, travasato volta per volta in ALFA.

HIR 2: pseudo carry per la supermoltiplicazione oppure

HIR 2: pseudo carry per la super moltiplicazione o borrow per la sottrazione

HIR 3: indice massimo della memoria che inizia con la 06.

HIR 4: indice massimo della memoria che inizia con la 33.

HIR 5: indice massimo della memoria che inizia con la 15.

HIR 6: intero tra 0 e 10 usato come moltiplicando nella subroutine B

HIR 7: indice massimo delle memorie nelle super operazioni

HIR 8: numero di cifre richiesto dall'utente all'inizio dell'esecuzione.

Veniamo ora al funzionamento del pro-

gramma, semplicissimo a differenza del programma stesso.

Innanzitutto bisogna premere RST ed introdurre il numero di cifre di precisione del risultato, con l'avvertenza che se si imposta un valore maggiore di 87 (maldestramente o appositamente nel vano tentativo di fondere la nostra povera 59, già abbondantemente torturata da sequenze interminabili di "Pgm 19 SBR 045" di "laportiana" memoria...), dicevamo se si supera 87 la calcolatrice lampeggerà uno 0, che ci invita a ridurre le pretese.

Fatto ciò dobbiamo impostare con la dovuta attenzione le cifre costituenti il radicando per gruppi di 10 cifre alla volta, cominciando da destra (cioè dalle meno significative), premendo ogni volta R/S.

Se cerchiamo di superare le 174 cifre non avremo alcuna segnalazione, a meno che la nostra ingordigia non ci porti ad oltrepassare le 180. Infine premiamo A e, nell'attesa, possiamo dedicarci ad altro... Sconsigliamo vivamente di rimanere in trepidante attesa del primo gruppo di cifre: pare che la tremula "C" che appare sul display durante l'elaborazione abbia uno strano effetto ipnotico...!

Dopo qualche anno, rifarsi al grafico di figura 1, avremo appunto il risultato per gruppi di 10 cifre (premendo ogni volta R/S) a partire dalla parte più significativa.

Come ultimo esempio, la radice di 2 con 40 cifre significative si otterrà con: RST 40 R/S 2 R/S A

Il risultato che si otterrà è quello già riportato precedentemente.

Attenzione al fatto che alcuni "gruppi" in uscita presentano a volte meno di 10 cifre (ad esempio il terzo in questo caso): vuol dire che le cifre non visibili sono degli ZERI, da aggiungere, ovviamente.

Concludiamo con alcune considerazioni.

Confessiamo, soprattutto per ristrettezza di tempi a disposizione, di non aver aspettato il termine dell'elaborazione, ma di aver brutalmente troncato il tutto con R/S (dopo una decina di minuti): andando a vedere il contenuto delle memorie si potevano già vedere parecchie cifre decimali del risultato. Sconsigliamo però di far riprendere l'elaborazione con un altro R/S in quanto tali "interrupt" sono per la maggioranza dei casi distruttivi dell'ordine logico che la calcolatrice stava seguendo in quel momento, se non altro per la perdita dell'operando nel display e soprattutto delle operazioni in sospenso a causa dell'inevitabile CLR per cancellare il display stesso.

Per quanto riguarda le risorse della 59 utilizzate dal programma, dobbiamo dire che raramente ci è capitato di vedere programmi di tale complessità, utilizzando fino all'ultimo bit a disposizione nella memoria. In questo caso si va oltre utilizzando massicciamente le HIR, per il cui significato rimandiamo al n°4 di MC: diciamo brevemente che si tratta di 8 memorie aggiuntive normalmente utilizzate durante i calcoli e le operazioni in sospenso nonché da istruzioni del tipo DMS e come buffer alfanumerico (o meglio alfa-codificato) per la stampante.

000	61	GTD	081	77	GE	162	33	33	243	73	RC+	324	04	04	405	69	DP
001	00	00	082	09	09	163	82	HIR	244	02	02	325	95	=	406	22	22
002	65	65	083	99	99	164	34	34	245	72	ST+	326	77	GE	407	69	DP
003	76	LBL	084	04	4	165	82	HIR	246	04	04	327	03	03	408	24	24
004	12	B	085	02	2	166	14	14	247	69	DP	328	41	41	409	43	RCL
005	82	HIR	086	42	STD	167	75	-	248	22	22	329	85	+	410	04	04
006	06	06	087	00	00	168	82	HIR	249	69	DP	330	43	RCL	411	22	INV
007	00	0	088	01	1	169	18	18	250	24	24	331	01	01	412	67	EQ
008	82	HIR	089	52	EE	170	95	=	251	43	RCL	332	95	=	413	04	04
009	02	02	090	01	-1	171	67	EQ	252	04	04	333	F2	ST+	414	01	01
010	73	RC+	091	00	0	172	04	04	253	22	INV	334	04	04	415	29	CP
011	02	02	092	42	STD	173	53	53	254	67	EQ	335	01	1	416	03	3
012	65	X	093	01	01	174	01	1	255	02	02	336	82	HIR	417	03	3
013	82	HIR	094	03	3	175	05	5	256	43	43	337	02	02	418	42	STD
014	16	16	095	03	3	176	42	STD	257	29	CP	338	61	GTD	419	02	02
015	85	+	096	93	.	177	02	02	258	06	6	339	03	03	420	42	STD
016	82	HIR	097	09	9	178	42	STD	259	42	STD	340	46	46	421	05	05
017	12	12	098	82	HIR	179	05	05	260	02	02	341	72	ST+	422	82	HIR
018	95	=	099	04	04	180	82	HIR	261	42	STD	342	04	04	423	14	14
019	72	ST+	100	07	7	181	15	15	262	05	05	343	00	0	424	59	INT
020	05	05	101	93	.	182	59	INT	263	82	HIR	344	82	HIR	425	82	HIR
021	75	-	102	02	2	183	82	HIR	264	13	13	345	02	02	426	07	07
022	43	RCL	103	82	HIR	184	07	07	265	59	INT	346	69	DP	427	01	1
023	01	01	104	03	03	185	01	1	266	82	HIR	347	24	24	428	00	0
024	95	=	105	01	1	186	00	0	267	07	07	348	69	DP	429	12	B
025	22	INV	106	06	6	187	12	8	268	02	2	349	22	22	430	43	RCL
026	77	GE	107	93	.	188	01	1	269	12	8	350	43	RCL	431	03	03
027	00	00	108	02	2	189	05	5	270	06	6	351	02	02	432	44	SUM
028	47	47	109	82	HIR	190	42	STD	271	42	STD	352	75	-	433	33	33
029	73	RC+	110	05	05	191	02	02	272	02	02	353	82	HIR	434	93	.
030	05	05	111	00	0	192	42	STD	273	42	STD	354	17	17	435	02	2
031	55	-	112	22	INV	193	05	05	274	05	05	355	95	=	436	22	INV
032	43	RCL	113	52	EE	194	01	1	275	01	1	356	22	INV	437	44	SUM
033	01	01	114	91	R/S	195	00	0	276	00	0	357	67	EQ	438	00	00
034	95	=	115	72	ST+	196	12	8	277	12	8	358	03	03	439	43	RCL
035	59	INT	116	00	00	197	87	IFF	278	05	5	359	17	17	440	00	00
036	82	HIR	117	69	DP	198	00	00	279	42	STD	360	82	HIR	441	75	-
037	02	02	118	20	20	199	02	02	280	03	03	361	12	12	442	04	4
038	52	EE	119	61	GTD	200	32	32	281	44	SUM	362	67	EQ	443	02	2
039	01	1	120	01	01	201	73	RC+	282	06	06	363	03	03	444	95	=
040	00	0	121	12	12	202	00	00	283	22	INV	364	74	74	445	77	GE
041	22	INV	122	76	LBL	203	55	-	284	86	STF	365	86	STF	446	01	01
042	74	SM+	123	11	R	204	53	-	285	01	01	366	01	01	447	55	55
043	05	05	124	69	DP	205	43	RCL	286	06	6	367	69	DP	448	86	STF
044	61	GTD	125	30	30	206	00	00	287	42	STD	368	36	36	449	00	00
045	00	00	126	08	8	207	22	INV	288	02	02	369	69	DP	450	61	GTD
046	50	50	127	42	STD	208	59	INT	289	02	2	370	33	33	451	01	01
047	00	0	128	03	03	209	65	X	290	04	4	371	61	GTD	452	55	55
048	82	HIR	129	73	RC+	210	01	1	291	42	STD	372	02	02	453	22	INV
049	02	02	130	00	00	211	00	0	292	05	05	373	86	86	454	52	EE
050	69	DP	131	75	-	212	54	-	293	82	HIR	374	87	IFF	455	82	HIR
051	22	22	132	43	RCL	213	22	INV	294	13	13	375	01	01	456	14	14
052	69	DP	133	03	03	214	28	LDG	295	59	INT	376	03	03	457	75	-
053	25	25	134	22	INV	215	52	EE	296	82	HIR	377	89	89	458	01	1
054	43	RCL	135	28	LDG	216	22	INV	297	07	07	378	09	9	459	93	.
055	02	02	136	95	=	217	52	EE	298	43	RCL	379	42	STD	460	01	1
056	75	-	137	77	GE	218	42	STD	299	03	03	380	03	03	461	95	=
057	82	HIR	138	01	01	219	03	03	300	12	8	381	04	4	462	59	INT
058	17	17	139	47	47	220	95	-	301	02	2	382	44	SUM	463	42	STD
059	95	=	140	02	2	221	75	-	302	04	4	383	06	06	464	00	00
060	22	INV	141	22	INV	222	59	INT	303	42	STD	384	86	STF	465	73	RC+
061	67	EQ	142	44	SUM	223	44	SUM	304	04	04	385	01	01	466	00	00
062	00	00	143	03	03	224	15	15	305	01	1	386	61	GTD	467	91	R/S
063	10	10	144	61	GTD	225	95	=	306	05	5	387	02	02	468	69	DP
064	92	RTN	145	01	01	226	65	X	307	42	STD	388	86	86	469	30	30
065	47	DMS	146	29	29	227	43	RCL	308	02	02	389	02	2	470	43	RCL
066	55	-	147	43	RCL	228	03	03	309	00	0	390	04	4	471	00	00
067	01	1	148	03	03	229	95	-	310	82	HIR	391	42	STD	472	75	-
068	00	0	149	55	-	230	72	ST+	311	02	02	392	02	02	473	03	3
069	85	+	150	01	1	231	00	00	312	82	HIR	393	01	1	474	02	2
070	03	3	151	00	0	232	03	3	313	15	15	394	05	5	475	95	=
071	04	4	152	95	=	233	03	3	314	59	INT	395	42	STD	476	22	INV
072	95	=	153	44	SUM	234	42	STD	315	82	HIR	396	04	04	477	67	EQ
073	82	HIR	154	00	00	235	02	02	316	07	07	397	82	HIR	478	04	04
074	08	08	155	01	1	236	06	6	317	73	RC+	398	15	15	479	65	65
075	75	-	156	52	EE	237	42	STD	318	02	02	399	59	INT			
076	04	4	157	01	1	238	04	04	319	75	-	400	32	X:T			
077	02	2	158	94	+/-	239	82	HIR	320	82	HIR	401	73	RC+	004	12	B
078	93	-	159	82	HIR	240	13	13	321	12	12	402	02	02	123	11	A
079																	