

# Computer grafica applicata - geometria analitica; la retta

In questo articolo tratteremo la retta, un argomento noto a tutti in quanto si tratta dell'elemento geometrico più elementare ed intuitivo. Data la sua importanza è bene, per chi si occupa di geometria, disegno o computer grafica, conoscerlo nei suoi vari aspetti.

Vedremo, ricorrendo a semplici concetti di geometria analitica, come si individua una retta, quali sono le sue caratteristiche, come si traccia una parallela o una perpendicolare, dove si incontrano due rette, ecc.

Il tutto con un programma che usa il digitizer di MCmicrocomputer per l'input dei dati e il monitor Apple II per la visualizzazione.

#### Il concetto di funzione

La funzione (o corrispondenza) consiste di due insiemi A e B e di una regola che assegna ad ogni elemento di A un elemento (o un insieme di elementi) di B.

Se gli insiemi di cui si parla sono degli insiemi numerici, sarà facile tradurre le funzioni (o corrispondenze) in grafici utilizzando le coordinate cartesiane, dove, in genere, si pone sull'asse orizzontale l'insieme A e sull'asse verticale l'insieme B.

Facciamo il solito esempio della temperatura misurata in gradi Celsius e in gradi Fahrenheit.

L'insieme A è costituito da tutti i gradi Celsius (che altri non sono che i nostri gradi centigradi) e l'insieme B da tutti i gradi Fahrenheit. Per stabilire la corrispondenza si dice che la temperatura di fusione del ghiaccio è pari a 0 gradi Celsius e -32 gradi Fahrenheit mentre la temperatura di ebollizione dell'acqua è pari a 100 gradi Celsius e a 212 gradi Fahrenheit, e che ambedue le temperature variano linearmente.

Abbiamo così definito la regola che mette in corrispondenza i due insiemi, e poiché si tratta di insiemi numerici, potremo graficarli. Nel nostro caso, essendo la legge di corrispondenza lineare, essa sarà traducibile in una retta (fig. 1).

### La funzione retta

Abbiamo visto dunque che certe funzioni possono essere rappresentate da una retta, e che la retta è univocamente determinata quando si conoscono due suoi punti.

Altro concetto intuitivo è che tra due punti passa una sola retta.

Per individuare univocamente la retta

nel riferimento cartesiano, si ricorre all'equazione della retta:

Y = A \* X + B

dove A e B sono valori noti, per cui per ogni valore di X esiste un valore di Y.

Il significato dei coefficienti A, B è intui-

tivo. B è il valore di Y quando X è uguale a zero, ovvero è il punto in cui la retta interseca l'asse Y (determinata dall'equazione X=0).

Invece il coefficiente A rappresenta l'inclinazione della retta rispetto agli assi car-

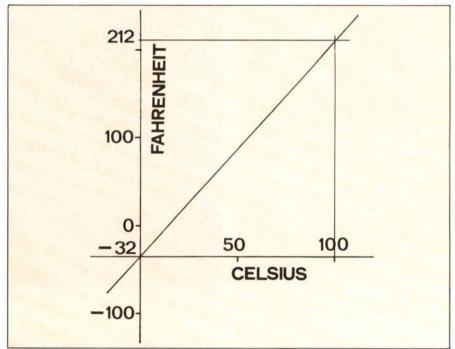


Figura 1 - Corrispondenza tra gradi Celsius e gradi Fahrenheit, La retta individua la corrispondenza tra tutte le temperature misurate in gradi Celsius (asse X) e quelle misurate in gradi Fahrenheit (asse Y).

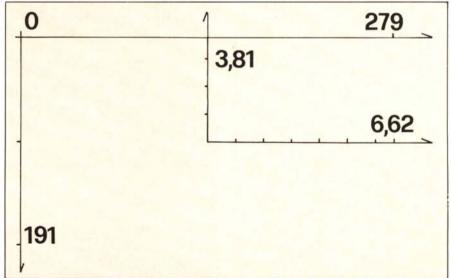


Figura 2 - Cambio di riferimento - Tra riferimento video (0 - 279 in orizzontale e 0 - 159 in verticale) e riferimento di lavoro (da MO = -6.67 a MO = 6.62 in orizzontale e da MS = -3.76 a MN = 3.81 in verticale).

tesiani. Infatti considerando per semplicità una retta con B=0, l'equazione diventa Y=A\*X, cioè il valore Y si incrementa di A volte rispetto all'incremento del valore X.

# Le rette parallele e perpendicolari

Giocando un po' con i valori A e B si trovano tutte le situazioni particolari.

Se B=0 la retta passa per l'origine degli assi cartesiani. Infatti qualsiasi sia A, se X=0 anche Y=0.

Se A = 0 per qualsiasi valore di X la Y sarà uguale a B e quindi avremo la retta Y = B parallela all'asse X.

Analogamente le rette parallele all'asse Y avranno equazione X = Cost., in quanto qualsiasi valore daremo a Y la X sarà costante.

Due rette saranno parallele quando avranno l'inclinazione rispetto agli assi cartesiani A uguale. Quindi ogni retta ha una famiglia di rette parallele nella cui equazione il coefficiente A è lo stesso e può variare solo B.

Analogamente una retta è perpendicolare ad un'altra quando hanno inclinazione, ovvero coefficienti A opposti (A, -1/A).

### L'equazione della retta

Una retta è quindi direttamente definita e quindi sono definiti tutti i suoi punti P(X, Y) quando sono noti i coefficienti A, B.

Il problema inverso, cioè la determinazione dell'equazione della retta, noti due punti, si risolve facilmente con un po' di algebra:

Y = A \* X + B equazione generica in cui A. B non sono noti

P1(X1,Y1) punti noti della retta P2(X2,Y2)

Se P1, P2 sono punti in cui passa la retta, sostituendo due volte tali valori nell'equazione generica e conseguentemente risolvendo il sistema di equazioni di 1º grado si trovano facilmente le incognite che altro non sono che i coefficienti A,B:

A = (Y1 - Y2) / (X1-X2)

B = Y1 - X1 \* A

Ancora più semplicemente per trovare la retta parallela alla retta nota Y = A \* X + B1 e passante per il punto P3(X3,Y3) Y = A \* X + B2 equazione generica della parall.

B2=Y3-A \* X3 valore di B2 ottenuto risolvendo la retta generica rispetto a P3.

E per trovare la perpendicolare passante per il punto P3

Y = -1/A \* X + B3 equazione generica della perpend.

B3 = Y3-1/A \* X3 valore di B3 ottenuto risolvendo la retta generica rispetto a P3.

Un altro semplice problema di algebra è la ricerca del punto di intersezione tra due rette. Siano

Y = A1 \* X-B1

Y = A2 \* X-B2

le due rette, il punto di intersezione è indi-

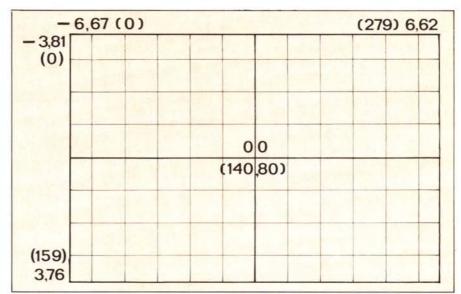


Figura 3 - Campo di lavoro - Tale campo di lavoro è stato fissato in maniera arbitraria. Si può modificare a piacimento lavorando sui valori SS, TX e TY di riga 120.

viduato dalla coppia di valori X1, Y1 che soddisfano ambedue le equazioni:

X1 = (B2 - B1) / (A1 - A2)

Y1 = X1 \* A1 + B1

Tali valori sono al solito ricavati risolvendo, con l'ausilio dell'algebra il sistema di equazioni di 1º grado.

È qui evidente che se le rette sono parallele X1 va all'infinito e quindi anche Y1, cioè le rette non si incontrano mai. Abbiamo un po' giocato con l'equazione della retta, ma quali sono i problemi che si incontrano a riportare tutte le formule in un programma analitico/grafico?

Dal punto di vista analitico non ci sono problemi, tutte le formule viste vanno benissimo anche in Basic. I problemi maggiori si trovano nella visualizzazione, nel nostro caso sul monitor Apple II, delle varie rette.

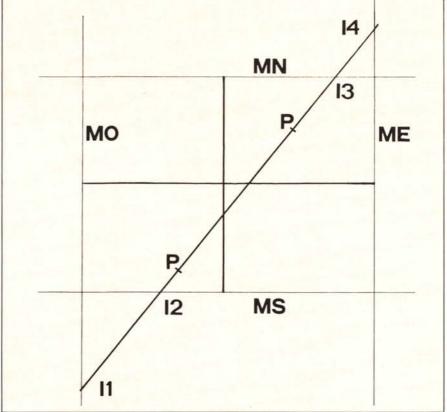


Figura 4 - Intersezioni - Le intersezioni tra la nostra retta e le quattro che individuano i margini dello schermo sono quattro. Di queste, se la retta attraversa lo schermo, due sono visibili.

## I problemi per visualizzare la retta

Dopo aver trattato brevemente l'equazione della retta, cerchiamo di realizzare un programma nel quale sviluppare in modo non solo analitico ma anche grafico le problematiche studiate.

Nel programma pubblicato utilizzeremo per l'input dei dati la tavoletta grafica per Apple II di MCmicrocomputer.

Il programma in questo caso va eseguito dopo la operazione di calibratura della tavoletta. Chi non avesse la tavoletta può o comprarsela al più presto oppure modificare il programma eliminando le routine relative alla tavoletta (righe 10/90, riga 901, righe 1000/1100) abilitando con ciò la riga 910 per l'input da tastiera. In questo caso è chiaro che i valori da immettere dovranno essere in coordinate schermo.

Le formule analitiche per individuare le rette che utilizzeremo sono esattamente quelle descritte prima e le vedremo distribuite nel programma, invece per visualizzare le rette dobbiamo risolvere preventivamente altri problemi.

#### Problema della scala e della traduzione delle coordinate

Sia la tavoletta che il monitor Apple II hanno la stessa definizione 280 per 192 pixel, individuati da valori positivi X, Y. Poiché non è detto che tale riferimento vada bene, lo abbiamo cambiato e lo vediamo in figura 2.

Per far passare il punto PV (x, y) dal riferimento video a quello di lavoro PL (x. y) dovremo utilizzare le formule:

X = (X-TX)/SSY = (TY-Y)/SSe per il viceversa le formule X = X \* SS + TXY = TY - Y \* SS

dove SS è il fattore di scala, TX e TY le coordinate della origine del riferimento di lavoro "misurata" nel riferimento video. La presenza del segno meno per la coordinata Y dipende dal fatto che l'orientamento di tale asse è invertito nei due riferimenti. Inoltre, poiché lavorando sul monitor Apple II possiamo utilizzare solo valori interi, nelle formule usate per il programma abbiamo inserito gli opportuni arrotondamenti.

Abbiamo preferito fissare i valori della trasformazione di riferimento (SS=21,TX = 140, TY = 80), anziché renderli variabili per non appesantire il programma in una parte estranea all'argomento che stiamo trattando.

Il nostro campo di lavoro è quindi quello di figura 3, e di questa figura si può costruire una maschera per il digitizer direttamente in scala. Chi segue questi articoli si sarà trovato spesso di fronte a problemi di "scaling", cioè come ingrandire e spostare il disegno per farlo venire bene nell'output.

I software grafici più sofisticati comprendono comode routine di trasforma-

zione, l'importante è comunque capire il problema così da poter trovare comunque ed in poco tempo le formule di trasforma-

# Retta tra due punti

L'altro problema è il tracciamento della retta tra due punti.

Noti i due punti P1 e P2, con l'istruzione Applesoft HPLOT... TO ... possiamo tracciare il segmento che unisce i due punti. Per tracciare invece la retta che passa per i due

to puntato i valori X, Y pronti per l'uso. Il software fornito con la tavoletta è molto completo e contemporaneamente molto chiaro e documentato (anche negli

articoli sul numero 8 e successivi della rivista) per poter essere modificato secondo le esigenze.

Il programma TAVOLETTA va spezzato in due per poter essere inserito nel programma LA RETTA (fig. 6). Una prima parte (righe 10-90) serve per la lettura del file PADDLE.CODE necessario per l'inizializzazione delle variabili e per lo azzera-

```
REM CARICAMENTO DATI CALIBRAZIONE
100
            CHR$ (4)"BLOAD PADDLE CODE"
     PRINT
110
     DEF
          FN PK(I) = PEEK (I) + 256 *
                                            PEEK (I + 1)
120
130 Z0 =
           FN PK(797):Z1 = FN PK(799)
          FN PK(801):V1 = FN PK(803)
140 VØ =
150 PV = 3, 14159 / V1 PZ = 3, 14159
             AZZERAMENTO COORDINATE
160
    PEM
     TEXT : HOME : PRINT " PUNTO IN ALTO A SINISTRA"; PRINT GOSUB 500: IF PEEK (49251) > 127 THEN 180
170
180
190
     GOSUB 400:XI = XX:YI = YX
200
          INPUT PUNTO
             PRINT " INPUT PUNTO "
210
     PRINT
     GOSUB 500: IF PEEK (49251) D 127 THEN 220 GOSUB 400 |XZ| = |XZ| - |XI| |YZ| = |YZ| - |YI|
230
240
     PRINT XX YX: PRINT : GOTO 200
400
     F:EM
410 A = (Z0 - P0) * PZ B = (P1 - Z1) * PY - A
420 XX = 150 * ( COS (B) - COS (A))
430 Y% = 150 + ( SIN (B) + SIN (A))
440
     RETURN
500
     REM LETTURA PADDLES
     POKE 779, 100: CALL 768: P0 = 256 * PEEK (13) + PEEK (12)
510
     FOR T = 1 TO 50: NEXT
520
     POKE 779, 101:
                    CALL 768 P1 = 256 *
                                            PEEK (13) +
     FOR T = 1 TO 50: NEXT
                              RETURN
```

Figura 5 - Programma TAVOLETTA - Questo programma, usufruendo dei dati di calibrazione della tavoletta grafica di MC, fornisce la coppia di coordinate della posizione del puntatore.

punti occorre utilizzare una opportuna routine, che individua le intersezioni della retta con tutte e quattro le rette costituenti i margini (vedi fig. 4). Delle quattro intersezioni solo due sono "visibili" e tra queste due si deve tracciare la retta. Anche questa routine (vedi la spiegazione nel commento del programma) va eseguita in coordinate reali, e una volta individuata l'intersezione basterà eseguire la routine di trasformazione delle coordinate.

# La tavoletta grafica di MC

Come noto la tavoletta grafica è l'apparecchio più idoneo per l'immissione dei dati grafici, in quanto il puntatore fornisce direttamente al computer le coordinate X, Y del punto, senza doverle rilevare a mano e immetterle da tastiera.

Useremo quindi la nuova tavoletta grafica per Apple II prodotta dalla nostra

La prima cosa da fare consiste nel preparare un programma che fornisca semplicemente le coordinate X, Y del punto sulla tavoletta, nella stessa scala dello schermo.

Chi ha la tavoletta lo avrà già fatto, comunque il programma è in figura 5.

Tale programma legge i valori memorizzati nel file PADDLE.CODE dal programma di calibrazione, fornito nel software della macchina, e dopo un allineamento del punto 0,0 fornisce per ogni pun-

mento degli assi. La seconda parte (righe 1000-1100) contiene la routine di lettura delle PADDLES (riga 1030 - valori P0, P1) e la routine di traduzione dei valori letti in valori coordinate (riga 1060 valori X%,

Chi non ha la tavoletta può ovviamente, come detto, usare il programma, eliminando le parti relative alla tavoletta ed eliminando la riga 901 di collegamento con la routine di lettura delle coordinate.

#### Descrizione del programma

La lettura del menu (fig. 7) dà una chiara indicazione di cosa il programma fa, esegue una serie di routine per la visualizzazione di rette secondo le formule descritte in procedenza.

Il programma è molto compatto, cioè lavora con molte subroutine che vengono richiamate ciascuna da varie parti del pro-

routine 10 - 90: inizializzazione della tavoletta (già descritta)

routine 1000-1100: input da digitizer (già descritto).

routine 900-940: lettura di coordinate schermo, visualizzazione del punto, e traduzione in coordinate lavoro (già descrit-

routine 950-960: traduzione da coordinate schermo in coordinate di lavoro (già descritta).

Figura 6 - Programma LA RETTA - Il programma è molto compatto, lavora con molte subroutine, ed è quindi indispensabile leggere il testo per capire come funziona.

routine 880-890: loop generico di attesa, serve per rallentare l'esecuzione del programma e si può modificare,

routine 660-760: routine di ricerca delle intersezioni tra la retta (in coordinate di lavoro) e i margini dello schermo. Vengono calcolate le intersezioni con le rette margini Y=MN, Y=MS, X=MO, X=ME.

Non appena si trovano i primi valori X, Y sul margine schermo si fissa il punto. Trovati poi i secondi valori X, Y si fissa il secondo punto e si può tracciare la retta. Il flag FL si pone uguale a 1 se il primo punto è già stato individuato. Tracciata la retta si esce fuori dalla routine senza dover cercare altre eventuali intersezioni.

routine 770-800: routine di input retta tramite i coefficienti. Questa routine viene richiamata dalle opzioni 2 e 6 del menu.

routine 810-870: routine di input della retta dati due punti. Tale routine viene richiamata dalle opzioni 1, 3, 4, 5 del menu, anzi due volte dall'opzione 5. I due punti P1 e P2 vengono tradotti in coordinate di lavoro, vengono poi calcolati i coefficienti A, B (tramite la routine 620), e con questi viene visualizzata la retta (routine 660).

routine 620-650: routine di calcolo dei valori A, B che usa le formule descritte prima, e previene il caso di denominatore uguale a zero, nel calcolo del coefficiente A.

righe 100-150: inizializzazione dei valori "scaling", dei valori dello schermo di lavoro (tramite i valori dei margini nord, est,

```
**********
GEOMETRIA ANALITICA - LA RETTA
A de la proteció de destre la constante de la 
 1 - DATI DUE PUNTI EQUAZIONE
                    E DISEGNO DELLA RETTA
2 - DATI I COEFFICENTI A/B
                     DISEGNO DELLA RETTA
 3 - DATA UNA RETTA ( PER PUNTI )
                     PARALLELA DA UN PUNTO
 4 - DATA UNA RETTA ( PER PUNTI )
                     PERPENDICOLARE AD UN PUNTO
 5 - INTERSEZIONE TRA DUE RETTE
                     DATE PER PUNTI
6 - INTERSEZIONE TRA DUE RETTE
                     DATE PER COEFFICENTI
7 - FINE
*********
SCEGLI 3
```

Figura 7 - Menu del programma LA RETTA - Le opzioni di lavoro sono 6.

sud, ovest). Caricamento dei data con le stringhe di stampa. Definizione di una funzione di arrotondamento al centesimo, utilizzata per la scrittura (che avviene spesso) dell'equazione della retta.

righe 160 - 320: menu del programma. righe 330 - 390 disegno dello schermo di lavoro con il tracciamento degli assi e dei segmentini individuanti una specie di quadrettatura, e con la scrittura dei valori di riferimento.

Infine le routine richiamate dal menu sono:

righe 420 - 430: retta per due punti;

righe 440 - 450: retta dati i coefficienti;

righe 460 - 490: parallela da un punto P3, ad una retta data per punti;

righe 500 - 560: perpendicolare da un punto P3, ad una retta data per punti;

righe 550 - 560: calcolo del punto di intersezione tra due rette date per punti;

righe 570 - 610: calcolo del punto di intersezione tra due rette date per coefficienti.

Questo articolo contiene tutte le nozioni fondamentali sulla retta, che sono esemplificate nel programma dimostrativo. Con queste nozioni base è facile risolvere molti dei problemi che si presentano a chi si interessa di geometria e computer grafica.